ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

fuorchè per la sfera. Ma allora anche la costante capillare è la stessa per tutte le direzioni. Benchè ciò sembri in contraddizione con l'essenza e con la struttura del cristallo, poichè la densità superficiale non dovrebbe essere la stessa, nondimeno io credo si possa giustificare il risultato, supponendo che in seguito alla deformazione superficiale si formi sul contorno uno strato quàsi isotropo. Queste deduzioni conducono alla seguente regola:

La figura normale del cristallo liquido è la superficie sferica.

Essa soddisfa al principio della minima energia superficiale come le leggi di Curie e Hauy, che determinano la figura normale dei cristalli solidi, con questa differenza che nei cristalli liquidi la minima energia superficiale è condizionata alla deformazione per effetto della tensione stessa, nei solidi, stante la loro resistenza, la deformazione è esclusa o trascurabile. Ogni altra figura di un cristallo liquido che non soddisfa al principio della minima tensione superficiale deve considerarsi anormale ed è perciò instabile.

Tra i liquidi assoluti e i solidi sono in mezzo certi stati fisici, che si chiamano molli o fluenti, fluenti perchè possono fluire sotto l'azione di deboli forze esterne. Varî sono i cristalli fluenti, i più conosciuti fra i quali gli oleati alcalini. Ora siffatti cristalli non possono assumere la figura sferica, poichè essi non si deformano facilmente, nè possono esplicare una tale resistenza come i solidi, da comparire nella veste di poliedri. Le loro figure stanno in mezzo fra gli uni e gli altri.

Meccanica. — *Sulla teoria degli impulsi.* Nota del Corrisp. E. Almansi.

1. Dimostro in questa Nota alcuni teoremi sugli impulsi, i quali esprimono proprietà che non credo siano state ancora segnalate (Teor. I e II); ed altri teoremi noti ritrovo, o enuncio sotto una forma più generale, non escludendo (come si è fatto dalla maggior parte degli autori), il caso di vincoli *unilaterali*; caso che nella teoria degli impulsi è da ritenersi singolarmente importante, come quello che si presenta, per esempio, allorchè fra i corpi di un sistema hanno luogo degli urti.

Tenendo poi conto dei risultati ottenuti, formulo una legge generale relativa al modo di comportarsi, sotto l'azione di dati impulsi, di un sistema di corpi *anelastici*.

2. Sia S un sistema formato di n punti materiali, soggetti a vincoli. Noi supponiamo che nell'istante t_0 un punto qualunque M del sistema riceva un impulso *diretto* (ossia dovuto a forze direttamente applicate) rappresentato dal vettore (P).

I vincoli nell'istante t_0 potranno subire una variazione. Denoteremo con L i vincoli nell'istante successivo a t_0. Ai vincoli L (dei quali soltanto si avrà da tener conto) imporremo queste condizioni: che i movimenti virtuali siano tutti e soli i movimenti compatibili coi vincoli; e che moltiplicando per una costante positiva le velocità relative ad un movimento compatibile coi vincoli, ovvero componendo più movimenti compatibili coi vincoli, si ottenga ancora un movimento compatibile coi vincoli.

Riferiamo i punti del sistema ad una terna di assi fissi. A ciascuna delle $3n$ coordinate corrisponderà una massa m (la massa del punto a cui appartiene quella coordinata), una proiezione di velocità u_0 relativa all'istante che precede t_0, una proiezione di velocità u relativa all'istante successivo a t_0, una proiezione d'impulso diretto A, ecc.

Le velocità di proiezioni u, la cui determinazione sarà, in generale, lo scopo del problema, devono essere compatibili coi vincoli L. Denoteremo con (α) questa prima condizione. Esse devono poi soddisfare una seconda condizione (β), la quale esprime il Principio di D'Alembert applicato agli impulsi: per qualunque movimento compatibile coi vincoli L deve aversi, dette ν le corrispondenti proiezioni di velocità,

$$\Sigma \{ m(u_0 - u) + \mathrm{A} \} \nu \leqq 0,$$

la somma essendo estesa a tutte le $3n$ coordinate.

Introduciamo le velocità di proiezioni

$$u_1 = u_0 + \frac{\mathrm{A}}{m},$$

ossia le velocità che avrebbero i punti del sistema, nell'istante successivo a t_0, se fossero liberi. La formula precedente diverrà

$$\Sigma m (u_1 - u) \nu \leqq 0. \tag{1}$$

Noi avremo da considerare movimenti, come (ν), pei quali si richiederà soltanto di soddisfare la condizione (α), vale a dire di essere compatibili coi vincoli; e movimenti, come (u), che dovranno soddisfare tanto la condizione (α), quanto la condizione (β). Questi ultimi li diremo movimenti *possibili* (geometricamente e dinamicamente possibili).

Date le posizioni e le velocità dei punti nell'istante che precede t_0, nonchè gl'impulsi diretti (P), ossia date le posizioni dei punti e le velocità u_1, le condizioni (α) e (β), in generale, non sono sufficienti a determinare il movimento (u) del sistema nell'istante successivo a t_0, ed è necessario, affinchè il movimento risulti determinato, aggiungere ulteriori condizioni.

3. Supponendo assegnate le u_1, consideriamo due movimenti (v) e (w), per ora arbitrarii; e poniamo:

$$\mathrm{Q} = \Sigma m (u_1 - v)^2,$$
$$q = \Sigma m (u_1 - w)^2,$$

intendendo sempre che le somme siano estese a tutte le $3n$ coordinate. Sarà

$$Q - q = \Sigma m (v^2 - w^2) - 2 \Sigma m u_1 (v - w),$$

ovvero, togliendo ed aggiungendo il termine $2 \Sigma m w (v - w)$,

$$(2) \qquad Q - q = \Sigma m (v - w)^2 - 2 \Sigma m (u_1 - w)(v - w).$$

Da questa formula dedurremo varie conseguenze.

Consideriamo da prima la quantità Q per tutti i movimenti (v) *compatibili coi vincoli*. Esisterà certamente per Q un limite inferiore finito. Sia esso q; e sia (w) un movimento compatibile coi vincoli per il quale Q diventi uguale a q: movimento di cui ammettiamo dunque l'esistenza.

Per qualunque altro movimento (v) compatibile coi vincoli sarà $Q \geqq q$; quindi, in virtù della formula (2),

$$(3) \qquad \Sigma m (u_1 - w)(v - w) \leqq \tfrac{1}{2} \Sigma m (v - w)^2.$$

Sia pure (ν) un movimento compatibile coi vincoli; c una costante positiva. Anche il movimento a cui corrispondono le proiezioni di velocità $w + c\nu$ sarà compatibile coi vincoli (§ 2); onde la formula (3) dovrà essere verificata se poniamo $v = w + c\nu$, ossia $v - w = c\nu$. Avremo allora, tolto il fattore positivo c,

$$\Sigma m (u_1 - w) \nu \leqq \frac{c}{2} \Sigma m \nu^2.$$

Affinchè questa condizione sia verificata per un valore comunque piccolo di c, dovrà essere

$$\Sigma m (u_1 - w) \nu \leqq 0.$$

Ma (ν) può rappresentare un movimento qualunque compatibile coi vincoli: la formula ottenuta, analoga alla (1), dice dunque che il movimento (w) soddisfa la condizione (β). Quindi:

Un movimento compatibile coi vincoli che rende minima la quantità Q *è un movimento possibile* [1].

4. Riprendiamo la formula (3), intendendo ancora che (w) rappresenti un movimento compatibile coi vincoli pel quale Q assuma il valore q. E

[1] Questo, sostanzialmente, è il teorema del Robin, del quale una dimostrazione, relativa al caso che i vincoli siano bilaterali, può vedersi nel *Traité de Méc. rat.* dell'Appell, t. II, pag. 507. In luogo della Q l'Appell considera una quantità che ne differisce per un termine addittivo, indipendente dalle v.

Sull'argomento qui trattato vedansi poi alcune Note di A. Mayer, Berichte der K. Sachsischen Gesel. der Wissen. zu Leipzig, a. 1898-1899.

poniamo ora $v = cw$, ove c denoti una costante positiva. Avremo:

$$(c-1)\,\Sigma m(u_1 - w)\,w \overline{<} \frac{(c-1)^2}{2}\,\Sigma m w^2 .$$

Segue da questa formula che deve essere

$$\Sigma m(u_1 - w)\,w = 0\,, \tag{4}$$

altrimenti noi potremmo prendere la costante c maggiore o minore dell'unità, in modo che il primo membro risultasse positivo, e così prossima ad 1 che il primo membro risultasse maggiore del secondo.

Il movimento (w), come si è veduto, è un movimento possibile. Sia pure (w') un movimento possibile. Esso dovrà verificare la condizione (β), espressa dalla formula (1) in cui si ponga $u = w'$. In particolare, assumendo come movimento (v) il movimento (w), si avrà

$$\Sigma m(u_1 - w')\,w \overline{<} 0 .$$

Sottraendo questa disuguaglianza dall'equazione precedente, otteniamo:

$$\Sigma m(w' - w)\,w \overline{>} 0 . \tag{5}$$

Ora, dalla identità $w' = w + (w' - w)$, si ricava

$$\Sigma m w'^2 = \Sigma m w^2 + \Sigma m(w' - w)^2 + 2\,\Sigma m(w' - w)\,w .$$

Per la formula (5) l'ultimo termine non è mai negativo; il penultimo, se w e w' sono due movimenti distinti, è sempre positivo. Onde avremo:

$$\Sigma m w'^2 > \Sigma m w^2 . \tag{6}$$

Di qui vediamo intanto che non possono esservi due movimenti compatibili coi vincoli, pei quali sia $Q = q$. Essi sarebbero infatti movimenti possibili (§ prec.); e dovrebbero verificare tanto la disuguaglianza (6), quanto l'altra ottenuta scambiando fra loro (w) e (w'): ciò che è assurdo.

La formula (6) mostra poi che se (w) è il movimento per cui $Q = q$, per ogni altro movimento possibile (dato che esista) la forza viva del sistema ha un valore maggiore.

Possiamo raccogliere i risultati ottenuti nel seguente

Teorema I. — *Fra i movimenti compatibili coi vincoli ve n'è uno solo che faccia assumere alla Q il suo valore minimo. Esso è un movimento possibile; e fra i movimenti possibili è quello a cui corrisponde la minima forza viva del sistema.*

5. Torniamo alla formula (2). Supponiamo ora (abbandonando le precedenti ipotesi) che (w) sia un movimento *possibile ed invertibile*; (v) un altro movimento qualunque *compatibile coi vincoli.*

Essendo (w) possibile, sarà

$$\Sigma m (u_1 - w) \nu \gtreqless 0$$

per qualunque movimento (ν) compatibile coi vincoli. In particolare per $(\nu) = (v)$ si avrà

$$\Sigma m (u_1 - w) v \gtreqless 0 ;$$

e per $(\nu) = (w)$, essendo (w) per ipotesi un movimento invertibile,

$$\Sigma m (u_1 - w) w = 0 .$$

Sottraendo membro a membro dalla disuguaglianza precedente, abbiamo:

$$\Sigma m (u_1 - w) (v - w) \gtreqless 0 .$$

Il secondo membro della (2) è dunque positivo. Onde sarà $Q > q$; ossia (w) è quel movimento, unico fra tutti i movimenti compatibili coi vincoli, per cui Q assume il valore minimo q. Quindi, tenendo conto del Teorema I, avremo il

TEOREMA II. — *Se fra i movimenti possibili esiste un movimento invertibile, ne esiste uno solo; il quale, fra i movimenti possibili, è quello a cui corrisponde la minima forza viva del sistema.*

Nel caso che i vincoli siano bilaterali, un movimento possibile è anche invertibile. Dunque:

Se i vincoli sono bilaterali esiste un solo movimento possibile. Esso è il movimento compatibile coi vincoli a cui corrisponde il minimo valore della Q.

6. Rappresenti ancora (w) il movimento compatibile coi vincoli (bilaterali od unilaterali) a cui corrisponde il minimo valore della Q.

Dalla identità $u_1 = w + (u_1 - w)$ si ricava:

$$\Sigma m u_1^2 = \Sigma m w^2 + \Sigma m (u_1 - w)^2 + 2 \Sigma m (u_1 - w) w .$$

Ma per la formula (4) l'ultimo termine è nullo; onde avremo:

$$\Sigma m u_1^2 - \Sigma m w^2 = \Sigma m (u_1 - w)^2 .$$

Questa formula esprime un teorema che comprende, come, caso particolare, un noto teorema del Carnot [1], e che è verificato tutte le volte che il sistema, nell'istante successivo a quello in cui hanno luogo gl'impulsi, assume il movimento (w), ossia il movimento che rende minima la Q; ciò che accade sempre se i vincoli sono bilaterali.

7. Ecco ora come i teoremi dimostrati trovano un'applicazione nel caso dei sistemi anelastici.

[1] V. Appell, loc. cit., pag. 501.

Il sistema S noi possiamo immaginarlo formato di un certo numero di corpi C, ciascuno dei quali risulti alla sua volta di un grandissimo numero di punti materiali m. Come caso limite, potremo supporre che i corpi C siano continui.

Consideriamo da prima l'urto di due corpi liberi, C′, C″. È questo uno dei casi nei quali le condizioni (α) e (β) non sono sufficienti a determinare il movimento del sistema nell'istante $t_0 + dt$ successivo all'urto.

Siano P′ e P″ i punti dei due corpi che nell'istante t_0 vengono ad incontrarsi; n denoti la normale comune alle superficie dei due corpi nel punto di contatto, diretta da C″ a C′. Nell'istante $t_0 + dt$ siano a' ed a'' le proiezioni sulla normale n delle velocità dei punti P′ e P″. La differenza

$$a = a' - a''$$

deve essere nulla o positiva, chè altrimenti i due corpi penetrerebbero uno nell'altro. L'osservazione mostra che il valore di a, restando immutate tutte le altre circostanze, varia a seconda della natura dei due corpi. Si possono immaginare dei corpi pei quali a sia sempre nulla. Questi corpi li diciamo anelastici.

Quando a è maggiore di zero (corpi elastici), il movimento dei due corpi, nell'istante successivo a t_0, non è invertibile; giacchè, invertendo il movimento, a diventerebbe negativa, e i corpi si compenetrerebbero.

Esso è invece invertibile quando a è uguale a zero, ossia nel caso dei corpi anelastici. Dunque, in virtù del Teorema II, il movimento che due corpi anelastici assumono dopo l'urto sarà, fra tutti i movimenti *possibili*, quello a cui corrisponde la minima forza viva del sistema; come d'altronde è noto.

Più in generale, consideriamo un sistema formato di quanti corpi si voglia, liberi, o soggetti a vincoli bilaterali, o derivanti da contatti. Supponiamo che nell'istante t_0 avvengano degli urti fra i corpi del sistema. Se questi sono anelastici, e se fra i movimenti possibili ve n'è uno il quale conservi i contatti fra i corpi (nel quale cioè la a, nell'istante $t_0 + dt$, siano nulle in tutti i punti di contatto), noi potremo ritenere, come fatto risultante da osservazioni relative a corpi che si avvicinano a corpi anelastici, che il sistema assumerà precisamente questo movimento. Ma un tale movimento è invertibile: esso sarà, per conseguenza, fra i movimenti possibili, quello pel quale la forza viva è minima.

Estendendo, per induzione, a tutti i casi (purchè si tratti di corpi anelastici) questa proprietà del movimento nell'istante $t_0 + dt$, siamo condotti a formulare la seguente legge generale:

Se un sistema di corpi anelastici, comunque vincolati, in un certo istante riceve degl'impulsi, il movimento che il sistema assume nell'istante *successivo è, fra tutti i movimenti possibili, quello a cui corrisponde la minima forza viva.*

Si deve osservare che, essendo i corpi anelastici dei corpi ideali, niente, a rigore, ci vieta di attribuire ad essi la proprietà espressa da questa legge. Soltanto le osservazioni (eseguite sopra quei corpi reali che noi assimiliamo a corpi anelastici) ci possono fornire un criterio sulla opportunità di adottarla. Nello studio teorico di numerosi casi particolari ho potuto tuttavia convincermi che i risultati a cui essa conduce si accordano, in mancanza di osservazioni dirette, con quello che l'intuizione lascia prevedere.

Ammessa questa legge, per il Teorema I il movimento che il sistema assume nell'istante successivo a t_0 sarà pure, fra tutti i movimenti *compatibili coi vincoli*, quello a cui corrisponde il minimo valore della Q. La determinazione di questo particolare movimento risolve dunque il problema non soltanto se i vincoli sono bilaterali (§ 5), ma anche se i vincoli sono unilaterali (e soddisfano le condizioni indicate nel § 2), purchè il sistema sia formato di corpi anelastici [1].

Petrografia. — *Studî litologici sull'isola del Giglio.* II: *Il granito.* Nota del Corrispondente Federico Millosevich.

Del bel granito del Giglio, pietra ornamentale e da costruzione molto nota e largamente adoperata fin dagli antichi Romani, la conoscenza scientifica non è molto progredita. Ne diedero descrizioni Meli [2], De Stefani [3], Lotti [4], per citare soltanto i più recenti, ma mancano finora intorno ad esso una indagine petrografica minuta e lo studio della costituzione chimica. Una tale lacuna mi propongo di colmare con questa seconda Nota litologica sull'isola del Giglio, che tratta del granito normale, lasciando ad una successiva lo studio degli inclusi e delle rocce filoniane, che attraversano la massa granitica.

Come è noto, il granito costituisce la massima parte dell'isola, ma per osservarlo nelle condizioni migliori, il luogo più opportuno è la spiaggia della Cala delle Cannelle, dove una fronte di cava estesa ed alta ed in attiva

(1) Il Mayer, nella terza delle Note citate (pag. 245) deduce la legge Q = min. dal Principio di Gauss. Ma nella teoria degl'impulsi non è lecito invocare se non quei principii di Dinamica che sono conseguenza delle condizioni (α) e (β). A mio parere, soltanto i teoremi qui dimostrati, messi in relazione colle osservazioni, rendono plausibile, per i corpi anelastici, la legge Q = min.

(2) Meli R. *Cenni sul granito dell'isola del Giglio e bibliografia scientifica relativa a quest'isola.* Roma, Boll. Soc. geol. ital., X, 1891, 383.

(3) De Stefani C., *Notizie geologiche* (in Sommier S., *L'isola del Giglio e la sua flora.* Torino, 1900, pag. XLVI).

(4) Lotti B., *Geologia della Toscana.* Roma, 1910, pag. 292.