ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Quindi chiamati $g', g'', g''', \ldots$ *dei nuclei di Lalesco; definite le matrici*

$$\|a^{(1)}_{hk}\| \equiv A_1 \;;\; \|A_1\|^r \equiv \|0\|$$
$$\|a^{(2)}_{hk}\| \equiv A_2 \;;\; \|A_2\|^s \equiv \|0\|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Chiamati $\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2, \ldots$ *i nuclei*

$$\Sigma a^{(1)}_{hk}\, \varphi'_h(x)\, \psi'_k(y) \,.\, \Sigma a^{(2)}_{hk}\, \varphi''_h(x)\, \psi''(y), \ldots$$

la soluzione generale della (A) *è data da*

$$[\alpha g' + \beta g'' + \gamma g''' + \cdots] + \Sigma \alpha_{pq} \overset{\times\times}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^q_p + \Omega$$

con le α, *costanti arbitrarie.*

Per $l = r = s = \cdots = u = 1$ si ritrovano i risultati della Nota precedente.

Meccanica Celeste. — *Ricerche sopra le perturbazioni del satellite di Nettuno* (¹). Nota II di G. Armellini, presentata dal Corrispondente A. Di Legge (²).

1. Come fu detto nella Nota I, noi ci proponiamo di ricercare se le perturbazioni secolari del satellite di Nettuno possano essere spiegate ammettendo l'esistenza di un secondo satellite rimasto ancora sconosciuto a cagione della sua piccola massa. A tale scopo indichiamo con P il piano invariabile del sistema formato da Nettuno e dai due satelliti, l'osservato e l'ipotetico, e scegliamo come unità fondamentali il giorno solare medio, il semidiametro equatoriale, e la massa del pianeta. Chiamiamo poi con K^2, m, n, a, p, e, i, ω il coefficiente attrattivo, la massa, il moto e la distanza media, il parametro, l'eccentricità, l'inclinazione e il modo ascendente del satellite *noto*, indicando con le stesse lettere accentate m', n' ecc. i corrispondenti elementi relativi al satellite *sconosciuto*.

Assumeremo il senso delle rotazioni in modo che n risulti positiva, e conteremo le inclinazioni ed i nodi assumendo P come piano fondamentale.

2. Osserviamo che noi possiamo sempre supporre che anche n' sia positiva essendo $i < \frac{\pi}{2}$, il moto di m' sarà diretto o retrogrado secondo che si ha

$$i' < \frac{\pi}{2} \quad \text{oppure} \quad i' > \frac{\pi}{2}\,.$$

(¹) Pervenuta all'Accademia il 31 ottobre 1916.
(²) Rendiconti, serie 5ª, vol. XXIV, 1° sem., 1915, pag. 569.

2. Con tale scelta, a cagione del teorema di Jacobi, avremo intanto l'equazione

$$\omega = \omega' + \pi \tag{1}$$

coincidendo in ogni istante il nodo ascendente della prima orbita su P, col nodo discendente della seconda. Adoperando poi i simboli dello Charlier [1] avremo l'altra equazione

$$\beta \sqrt{p} \operatorname{sen} i = \beta' \sqrt{p'} \operatorname{sen} i' \tag{2}$$

con [2]

$$\beta = \frac{\mathrm{K}m}{\sqrt{1+m}} \quad , \quad \beta' = \frac{\mathrm{K}m'}{\sqrt{1+m'}} \tag{3}$$

od anche, essendo m ed m' certamente assai piccole rispetto all'unità (massa di Nettuno),

$$\beta = \mathrm{K}m \qquad \beta' = \mathrm{K}m' . \tag{3^{bis}}$$

3. Le (1) e (2) sono matematicamente esatte; ma *se noi ci limitiamo alle sole perturbazioni secolari di primo ordine* (le uniche importanti, giacchè le uniche che fino ad oggi siano date dalle osservazioni), potremo ancora asserire che le inclinazioni i ed i' restano costanti [3] e che la comune linea dei nodi delle due orbite su P si muove con moto retrogrado uniforme [4].

Ora le osservazioni ci dicono [5] che il polo dell'orbita del satellite noto si muove con velocità costante descrivendo sulla sfera celeste un cerchio avente per centro un certo punto Q. Concludiamo quindi affermando che nell'ipotesi, in cui ci siamo posti, *il piano invariabile del sistema* formato da Nettuno e dai due satelliti, ha per polo Q, cioe *è precisamente quel piano che nella teoria del Tisserand viene assunto come piano equatoriale di Nettuno.*

4. Per procedere più oltre distingueremo tre casi, secondo che si ha $a' = a$, $a' > a$, $a' < a$. Nella presente Nota cominceremo a esaminare i due primi, rimandando alla successive il terzo caso e i calcoli numerici.

5. Caso I: $a' = a$. L'equazione (2), servendoci delle (3^{bis}), diviene

$$\frac{m'}{m} = \sqrt{\frac{p}{p}} \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} c'} = \frac{\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i}{\sqrt{1-e'^2} \operatorname{sen} i'} \tag{4}$$

[1] Ved. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, Bd. I, 274.

[2] Id. id., I, 344.

[3] Id. id., I, 360.

[4] Id. id., I, 361.

[5] G. Armellini, *Ricerche sopra le perturb. del satellite di Nettuno*, Nota I, in questi Rendiconti, seduta del 21 marzo 1915.

donde

$$\frac{m'}{m} \geqq \left| \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} i \right| . \tag{5}$$

Essendo $e = 0{,}007$ ed i certamente maggiore di 16°, come vedemmo nella I Nota, abbiamo in cifra tonda

$$\frac{m'}{m} > \frac{1}{4} . \tag{6}$$

Se ne conclude che l'ipotesi $a = a'$ è inammissibile, giacchè in tal caso il satellite perturbatore, avendo una massa certamente superiore alla quarta parte di quella del satellite noto, e conservando la stessa distanza media da Nettuno, non potrebbe essere sfuggito alle nostre osservazioni.

Risulta pure da quest'esame che il rapporto $\frac{a}{a'}$ non può essere molto vicino all'unità. Osserviamo passando che per $a' < a$ la (6) è valida a maggior ragione; però allora se il satellite è troppo vicino al pianeta, le sue condizioni di visibilità potrebbero essere difficilissime. L'ipotesi $a' \lessapprox a$ non può quindi escludersi *a priori*.

6. Caso II: $a' > a$. Posto $\frac{a}{a'} = \alpha$ si ha $\alpha < 1$: noi ci proponiamo di determinare il valore da assegnare ad α affinchè m' risulti minima.

In questa Nota comincieremo dallo studiare il caso in cui si supponga i' sufficientemente piccolo, p. es. $0 \leqq i \leqq 30°$ e in cui e' sia trascurabile. È chiaro che è questo il caso astronomicamente più importante; giacchè le orbite dei satelliti sono in generale poco eccentriche, hanno deboli inclinazioni le une rispetto alle altre e i moti hanno lo stesso senso. Passeremo poi al caso generale.

Con queste ipotesi semplificative potremo abbreviare i calcoli, usando le formole date dallo Charlier nel I volume della sua *Mecc. Celeste.*

Poniamo con lo Charlier [1]

$$\lambda(\alpha) = \frac{1 + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta - \frac{1}{1 - \alpha^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \tag{7}$$

$$x_1 = \frac{m'}{\pi} \lambda(\alpha) \sqrt[3]{n\, n'^2} \quad ; \quad x'_1 = \frac{m\, n'}{\pi} \lambda(\alpha) \tag{8}$$

dove si ha

$$\alpha = \frac{a}{a'} = \sqrt[3]{\frac{n'^2}{n^2}} . \tag{9}$$

[1] Op. cit., I, pp. 348 e 346.

L'equazione del moto secolare della linea dei nodi ([2])

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega'}{dt} = -(x_1 + x'_1) \tag{10}$$

diviene allora

$$\gamma = \left\{ m' \sqrt[3]{\frac{n'^2}{n^2}} + m \frac{n'}{n} \right\} \lambda(\alpha) \tag{11}$$

dove

$$\gamma = -\frac{\pi}{n} \frac{d\omega}{dt} \tag{12}$$

è una *quantità positiva nota*, essendo conosciuto dall'osservazione il movimento retrogrado dei nodi $\frac{d\omega}{dt}$.

Notiamo di passaggio che nella formola (11) dello Charlier, γ non tende a zero con m o con m'. L'apparente difficoltà si spiega pensando che quando p. es. m' diminuisce, il piano invariabile P si approssima sempre più al piano dell'orbita di m, onde un piccolo spostamento di quest'ultimo ne produce uno grandissimo nella linea dei nodi. Quando poi m' è zero, i due piani coincidono e γ non ha più senso.

Dalla (11) ricaviamo:

$$m' = \sqrt[3]{\frac{n^2}{n'^2}} \left\{ \frac{\gamma}{\lambda(\alpha)} - m \frac{n'}{n} \right\}, \tag{13}$$

che derivata rispetto ad n', tenendo presente la (9), dà:

$$\frac{dm'}{dn'} = -\sqrt[3]{\frac{n^2}{n'^2}} \left\{ \frac{m}{3n} + \frac{2\gamma}{3n' \lambda(\alpha)} + \frac{2\gamma}{3n' \lambda^2(\alpha)} \frac{d\lambda}{d\alpha} \sqrt[3]{\frac{n'^2}{n^2}} \right\}. \tag{14}$$

Se supponiamo, come abbiamo già detto, che l'eccentricità e' del satellite incognito sia trascurabile, la (2) diviene, poichè anche e è estremamente piccola,

$$m \sqrt{a} \operatorname{sen} i = m' \sqrt{a'} \operatorname{sen} i' \tag{15}$$

da cui, servendoci della (13) e della (9) ricaviamo

$$\frac{1}{2} \geq |\operatorname{sen} i'| = \left| \frac{m}{m'} \sqrt[3]{\frac{n'}{n}} \operatorname{sen} i \right| = \left| \frac{m \operatorname{sen} i}{\frac{\gamma n}{n' \lambda(\alpha)} - m} \right|. \tag{16}$$

([1]) Op. cit. I, pag. 361.

7. Prima di andare innanzi, dimostriamo una proprietà della funzione $\lambda(\alpha)$ che ci sarà utile tra breve. Servendoci dell' ineguaglianza

$$(17) \qquad (1-\alpha^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}\, d\vartheta ,$$

la (7) ci dà immediatamente

$$(18) \qquad \lambda(\alpha) > \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}} ,$$

la quale ci mostra che $\lambda(\alpha)$ è funzione positiva per α compreso fra 0 ed 1, e tende a ∞ quando α tende ad 1.

Derivando la (7) ed eseguendo alcune riduzioni abbiamo poi:

$$(19) \qquad \alpha(1-\alpha^2)^3 \frac{d\lambda}{d\alpha} = (\alpha^4 + 6\alpha^2 + 1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}\, d\vartheta -$$

$$- 4\alpha^2(1-\alpha^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}} - (1-\alpha^2)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} .$$

Utilizzando ora la (17) e l' ineguaglianza:

$$(20) \qquad (1-\alpha^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}} ;$$

la (19) ci dà

$$(21) \qquad \frac{d\lambda}{d\alpha} > \frac{2\alpha+\alpha^3}{(1-\alpha^2)^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}\, d\vartheta ,$$

la quale ci mostra che $\frac{d\lambda}{d\alpha}$ è positiva per $0 \leq \alpha \leq 1$ e tende ad ∞ quando α tende ad 1. Ne risulta che $\lambda(\alpha)$ è una funzione crescente dell'argomento. Osserveremo ancora che $\lambda(\alpha)$ ed n' si annullano contemporaneamente. Infatti, se si ha $n' = 0$ ne segue $\alpha = 0$ e quindi $\lambda(\alpha) = 0$. Viceversa a $\lambda(\alpha) = 0$ corrisponde $\alpha = 0$ e quindi $n' = 0$.

8. Tornando al nostro problema affinchè la (16) sia verificata, occorre che si abbia

$$(22) \qquad \frac{\gamma n}{m(1+2 \operatorname{sen} i)} \geqq n' \lambda(\alpha) .$$

È facile vedere che se la (22) è soddisfatta, la (13) dà certamente per m' un valore positivo.

Se si avesse $\gamma = 0$, uno dei due fattori λ o n' (e quindi tutti e due come abbiamo visto) si annullerebbe. Ne risulterebbe allora $\alpha = 0$, $a' = \infty$: cioè il satellite perturbatore sarebbe infinitamente lontano. Non si ha $m' = 0$, giacchè, come si è detto, a questo caso non corrisponde $\gamma = 0$.

Ciò posto, la (14) ci dice che m' è funzione decrescente di n': quindi il minimo valore di m' corrisponderà al massimo valore di n' ammissibile compatibilmente con la (22). Ora $\lambda(\alpha)$ è funzione crescente di α, e quindi, per la (9), di n'; chiamando dunque con ν il massimo valore ammissibile per n', e con λ_1 ciò che diviene λ quando si fa $n' = \nu$ avremo dalla (22)

$$\nu\lambda_1 = \frac{\gamma n}{m(1 + 2 \operatorname{sen} i)} . \tag{23}$$

La (23) è una equazione trascendente contenente la sola incognita ν: *per quanto si è detto su λ, essa ammetterà certamente una ed una sola radice reale positiva*. Risolvendola numericamente troveremo ν: sostituendo quindi nella (13) e chiamando con μ il minimo valore possibile per la massa del satellite ignoto, otteniamo:

$$\frac{\mu}{m} = 2 \sqrt[3]{\frac{\nu}{n}} \operatorname{sen} i . \tag{24}$$

La (15) ci dà allora come valore dell'inclinazione $i' = 30°$.
Vediamo quindi che il problema ammette una ed una sola soluzione.

Nelle prossime Note esamineremo il terzo caso ed eseguiremo i calcoli numerici.

Fisica. — *Sulla caratteristica dell'arco cantante nei regimi cui corrispondono diverse emissioni spettrali* (¹). Nota I di ELENA FREDA e NELLA MORTARA, presentata dal Socio BLASERNA.

1. Primo scopo di questa breve ricerca è stato quello di studiare, per mezzo di un tubo Braun munito di elettrodi piani per la deviazione elettrostatica dei raggi catodici, come e perchè varia la caratteristica dell'arco cantante (cioè la curva che dà la relazione fra la corrente che attraversa l'arco e la tensione ai poli del medesimo), quando si facciano variare, nel noto dispositivo di Duddel, l'intensità della corrente nel circuito principale, la distanza dei carboni, la capacità e l'induttanza del circuito derivato.

La forma delle correnti di Duddel, al variare delle condizioni dette, è stata studiata fin dal 1903 dal prof. Corbino (²).

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

(²) Corbino, *Sul meccanismo di produzione delle correnti di Duddel*. Atti Assoc. Elettrotecnica Ital., 1903, pag 597. Science Abstracts, VII, 1904, pag. 798, n. 2664.