ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Fisica matematica. — *Sopra un teorema di reciprocità relativo alla propagazione di correnti elettriche in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico.* Nota II della dottoressa ELENA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

3. Se si pensa al significato fisico dei coefficienti $a_{rs}\, b_{rs}$ che compaiono nelle (2) e (3), si vede che le uguaglianze (15) esprimono delle leggi elementari di reciprocità. Per esempio, la proprietà espressa dall'eguaglianza $a_{12} = a_{21}$ può tradursi in parole nel modo seguente:

La componente, secondo l'asse y, della velocità che uno ione positivo acquista quando è sollecitato da una f. e. m. uguale ad 1, diretta secondo l'asse x, è uguale alla componente, secondo l'asse x, della velocità che lo stesso ione acquista quando è sollecitato da una f. e. m. uguale ad 1, diretta secondo l'asse y.

I teoremi di reciprocità considerati nel precedente paragrafo sono una conseguenza di queste leggi elementari di reciprocità.

Il Maxwell, considerando la propagazione della elettricità in un mezzo anisotropo (non sottoposto all'azione di un campo magnetico), dice che, in tutti i casi di anisotropia che si presentano (fatta eccezione, tutto al più, pei magneti), si può ritenere che il determinante dei coefficienti, nelle uguaglianze che dànno le componenti della corrente elettrica espresse linearmente in funzione di quelle della f. e. m., sia un determinante simmetrico [2]. Se ci si riferisce alla teoria elettronica, questa ipotesi del Maxwell si traduce nelle uguaglianze (15)'.

Se non solo le uguaglianze (15)', ma anche le (15) sono soddisfatte in ogni caso di anisotropia, la stessa generalità vale per i teoremi considerati nel precedente paragrafo.

Si possono, ad ogni modo, facilmente stabilire dei casi in cui le (15) sono certamente soddisfatte. Tra gli altri, c'è il caso, che qui più interessa, di un conduttore che sia isotropo fuori del campo magnetico e che solo per azione di quest'ultimo acquisti una temporanea anisotropia. Per vederlo, consideriamo per un punto P del conduttore tre semirette $l\ m\ n$ che formino un triedro ortogonale destrorso avente la faccia lm tangente alla superficie di livello del campo magnetico che passa per P; per evidenti ragioni di simmetria, tutte le direzioni uscenti da P ed appartenenti al piano lm saranno equivalenti, dal punto di vista elettromagnetico. Perciò le compo-

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1916.

[2] *A Treatise on Electricity and Magnetism*, pag. 346, § 297; pag. 350, § 303 (Oxford, Clarendon Press, 1873).

nenti $\frac{d\lambda_1}{dt}\,\frac{d\mu_1}{dt}\,\frac{d\nu_1}{dt}$, $\frac{d\lambda_2}{dt}\,\frac{d\mu_2}{dt}\,\frac{d\nu_2}{dt}$ delle velocità di uno ione positivo e di uno ione negativo secondo i tre assi del triedro e le componenti $eE_{1l}\, eE_{1m}\, eE_{1n}$, $-eE_{2l}\; -eE_{2m}\; -eE_{2n}$ delle f. e. m. che sollecitano rispettivamente gli ioni stessi, debbono essere legate da relazioni del tipo

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = e h_1 E_{1l} \qquad \frac{d\mu_1}{dt} = e h_1 E_{1m} \qquad \frac{d\nu_1}{dt} = e k_1 E_{1n}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -e h_2 E_{2l} \qquad \frac{d\mu_2}{dt} = -e h_2 E_{2m} \qquad \frac{d\nu_2}{dt} = -e k_2 E_{2n}\,.$$

Detti $\omega_{11}\,\omega_{12}\,\omega_{13}$, $\omega_{21}\,\omega_{22}\,\omega_{23}$, $\omega_{31}\,\omega_{32}\,\omega_{33}$ i coseni direttori (variabili in genere da punto a punto) delle semirette $l\,m\,n$ rispetto ai tre assi $x\,y\,z$ a cui vengono riferiti tutti i punti del conduttore, dalle sei uguaglianze precedenti si possono dedurre le relazioni tra le componenti, secondo gli assi $x\,y\,z$, delle velocità degli ioni e le componenti, secondo gli stessi assi, delle f. e. m. che li sollecitano. Si possono cioè scrivere le equazioni (2) e (3) relative a questo caso particolare. Si trova

$$a_{12} = a_{21} = (k_1 - h_1)\,\omega_{31}\,\omega_{32} \qquad a_{23} = a_{32} = (k_1 - h_1)\,\omega_{32}\,\omega_{33}$$

$$a_{31} = a_{13} = (k_1 - h_1)\,\omega_{31}\,\omega_{33}\,.$$

I coefficienti b_{rs} si ottengono dai coefficienti a_{rs} sostituendo $h_2\,, k_2$ ad $h_1\,, k_1$.

Al teorema di reciprocità relativo ad una lamina metallica isotropa fuori del campo magnetico, appunto per evitare la considerazione dell'eventuale anisotropia determinata da quest'ultimo, è stata posta la limitazione che la lamina sia disposta secondo una superficie di livello del campo; per quanto precedentemente ho detto, tale limitazione si può evidentemente togliere.

Le conseguenze, che dal teorema di reciprocità considerato si possono dedurre nel caso di un conduttore a tre dimensioni, sono perfettamente analoghe a quelle che se ne possono dedurre per una lamina. Dal detto teorema segue per es. che, se un conduttore a tre dimensioni è munito di due elettrodi di estensione finita e resistenza trascurabile, la differenza di potenziale tra questi ultimi deve rimanere inalterata all'invertire del campo, se si mantiene costante l'intensità della corrente totale che attraversa il conduttore; non deve cioè mutare all'invertire del campo la resistenza globale del conduttore, per quanto possa mutare anche molto la distribuzione delle linee di flusso [1].

4. Ho voluto verificare sperimentalmente che il teorema di reciprocità del prof. Volterra sussiste, non solo nel caso di una lamina disposta secondo

[1] Cfr., per il caso di una lamina, Corbino e Trabacchi, Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 809.

una superficie di livello del campo magnetico, ma anche nei casi considerati nei precedenti paragrafi.

Il dispositivo adoperato è quello stesso adottato dal dott. Tasca, nel caso di una lamina disposta secondo una superficie di livello del campo [1]. Quest'ultimo era creato dalla grande elettrocalamita Weiss dell'Istituto Fisico di Roma; il campo uniforme era ottenuto con espansioni polari piane del diametro di cm. 10; il campo non uniforme con espansioni terminate da dischetti piani del diametro di mm. 5. Mediante due interruttori a sei pozzetti, potevo collegare due elettrodi A e B del conduttore coi poli di una batteria di accumulatori, ed altri due elettrodi C e D con un galvanometro Hartmann e Brawn a bobina mobile, o viceversa. Nel circuito della batteria e del conduttore era inserita una grossa resistenza, perchè l'intensità della corrente potesse ritenersi costante quando scambiavo gli elettrodi A, B con gli elettrodi C, D. Siccome interrompevo la corrente nel conduttore appena letta (con cannocchiale fornito di scala) la deviazione impulsiva del galvanometro, potevo evitare l'influenza dei fenomi termici che accompagnano il fenomeno Hall. Per eliminare le forze termoelettriche, avviluppavo il conduttore in bambagia.

Riferirò qualcuno dei risultati ottenuti. Indicherò con d la distanza minima tra le espansioni polari, con I l'intensità della corrente nell'elettrocalamita, con i l'intensità della corrente totale nel conduttore. Prenderò come misura delle differenze di potenziale $V_A - V_B$, $V_C - V_D$, le corrispondenti deviazioni del galvanometro, espresse in millimetri.

Ho cominciato dal verificare che il teorema di reciprocità per una lamina metallica, isotropa fuori del campo magnetico, sussiste, qualunque sia la sua orientazione nel campo. Mi sono perciò servita di un disco di bismuto del diametro di cm. 4,5 e dello spessore di mm. 2, fornito di quattro elettrodi puntiformi A B C D situati dissimmetricamente, realizzati saldando alla lamina quattro sottili fili di rame.

Con le espansioni polari piane (cioè con campo magnetico uniforme), per $d =$ cm 5, I = amp. 5, $i =$ amp. 0,2, posto il disco inclinato a circa 45° rispetto alle linee di forza del campo, ho ottenuto:

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_A - V_B$	26	53	38
$V_C - V_D$	53.5	26	38,5

(Si sottintende che, quando la differenza di potenziale era misurata tra A e B, la corrente entrava ed usciva per C e D; e viceversa).

Con le espansioni polari terminate da dischetti (cioè con campo magnetico non uniforme), per $d =$ cm 2,6, I = amp. 6,3, $i =$ amp. 0,2,

[1] Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pp. 336 e 709.

posto il disco in modo che formasse un angolo acuto col piano equatoriale dell'elettro-magnete, ho ottenuto i risultati seguenti:

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_A - V_B$	18	71,5	38
$V_C - V_D$	71,5	18,5	38,5

Nel caso della lamina, come negli altri casi di cui ora mi occuperò, non mi sono limitata alle esperienze di cui riferisco i risultati, ma ho fatto parecchie prove, sia scambiando tra loro gli elettrodi, sia mutando l'orientazione del conduttore nel campo. Ho trovato più o meno sensibile l'azione di quest' ultimo, nelle diverse condizioni, ma sempre ugualmente buono l'accordo con la teoria.

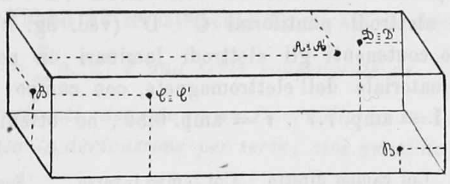

Fig. 1.

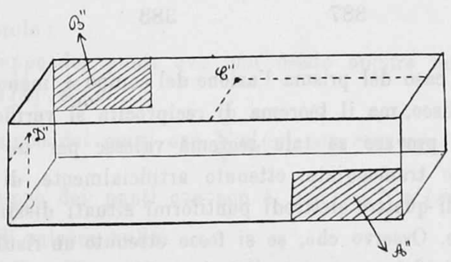

Fig. 2.

Per verificare che il teorema di reciprocità può estendersi al caso di un conduttore a tre dimensioni, isotropo fuori del campo magnetico, mi sono servita di un prisma di bismuto avente per base un quadrato di cm. 1,5 di lato e l'altezza di cm. 6, fornito o di elettrodi puntiformi, situati a caso lungo la sua superficie (ved. fig. 1), o di elettrodi puntiformi e di elettrodi laminari, di rame, di resistenza trascurabile (vedi fig. 2).

Con le espansioni polari piane, per $d =$ cm. 3,4 , I = amp. 7,8 , $i =$ amp. 0,43 , disposto il prisma con le facce laterali inclinate rispetto alle linee di forza del campo, servendomi dei quattro elettrodi puntiformi A B C D (ved. fig. 1), ho ottenuto

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_A - V_B$	411	421	395,5
$V_C - V_D$	421	411,5	395,5

Con le espansioni polari terminate da dischetti, per $d =$ cm. 1,8, $I =$ amp. 7,8, $i =$ amp. 0,58, servendomi dei quattro elettrodi puntiformi A′ B′ C′ D′ (ved. fig. 1), ho avuto:

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_{A'} - V_{B'}$	20	13,5	15
$V_{C'} - V_{D'}$	13,5	20,5	15,5

(In questa esperienza la faccia contenente gli elettrodi B′C′ e la faccia opposta contenente l'elettrodo D′ erano parallele al piano equatoriale dell'elettromagnete)

Saldati poi al prisma i due elettrodi laminari A″, B″, mi sono servita di essi e dei due elettrodi puntiformi C″, D″ (ved. fig. 2). Disposto il prisma con le facce contenenti gli elettrodi laminari un po' inclinate rispetto al piano equatoriale dell'elettromagnete, con campo non uniforme, per $d =$ cm. 1,8, $I =$ amp. 7,7, $i =$ amp. 0,59, ho ottenuto i seguenti risultati:

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_{A''} - V_{B''}$	383	387	367,5
$V_{C''} - V_{D''}$	387	383	367

Come si vede, nel caso del prisma l'azione del campo è meno sensibile che non nel caso del disco, ma il teorema di reciprocità si verifica sempre.

Ho voluto poi provare se tale teorema valesse per un frammento di cristallo di bismuto tramoggiato, ottenuto artificialmente, di forma affatto irregolare, fornito di quattro elettrodi puntiformi situati dissimmetricamente sulla sua superficie. Osservo che, se si fosse ottenuto un risultato negativo, con o senza l'azione del campo magnetico, sarebbe stata provata l'esistenza di casi di anisotropia per cui le uguaglianze (15) o (15)′ del § 2 non sono verificate.

Con le espansioni polari piane, per $d =$ cm. 4,8, $I =$ amp. 7, $i =$ amp. 0,31, per un'orientazione scelta a caso del cristallo, ho ottenuto

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_A - V_B$	104	157	119
$V_C - V_D$	156,5	104	119

Con le espansioni polari terminate da dischetti, per $d =$ cm. 2, $I =$ amp. 7, $i =$ amp. 0,37, disposto a caso il cristallo nel campo, ho ottenuto

	Col campo diretto	Col campo inverso	Senza campo
$V_A - V_B$	115	215	136
$V_C - V_D$	215	114,5	136,5

Come si vede, la legge di reciprocità era verificata anche in questo caso; anzi l'azione del campo era molto sensibile.

Ripreso infine il prisma di bismuto, fornito dei due elettrodi laminari $A'' B''$, facendo entrare ed uscire per essi la corrente, ho esaminato la loro differenza di potenziale col campo diretto e col campo inverso. Ho trovato, come la teoria richiede, che la differenza di potenziale non mutava all'invertire del campo.

Matematica. — *Sulla derivazione per serie*. Nota di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA [1].

1. Il prof. Fubini ha recentemente dimostrato il seguente teorema [2]:

Se $u(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$ *è una serie convergente di funzioni monotòne, per es. non decrescenti, definite in un intervallo* $(a \leq x \leq b)$, *ivi è quasi dappertutto lecita la derivazione per serie; cioè quasi dappertutto vale la*

$$u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x) .$$

In altre parole:

1°) il gruppo dei punti ove non esiste oppure non è finita anche una sola delle $u'(u)$, $u'_n(x)$;

2°) il gruppo dei punti ove $\sum_1^\infty u'_n(x)$ non converge;

3°) il gruppo dei punti ove non è $u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x)$

sono aggregati di misura nulla.

Poco dopo il Tonelli, mediante considerazioni geometriche piuttosto laboriose, riusciva a dimostrare [3] un teorema che può enunciarsi così:

Supposto: 1°) *che la* $\sum_1^\infty u_n(x)$ *converga in* (ab), *quasi dappertutto verso una funzione* $u(x)$; 2°) *che tanto le* $u(x)$ *quanto le* $u_n(x)$ *siano funzioni a variazione limitata nel detto intervallo*; 3°) *che la serie delle derivate (considerate là dove esistono)* $\sum_1^\infty u'_n(x)$ *sia quasi dappertutto convergente; sarà, quasi dappertutto,*

$$u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x) .$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1916.

(2) *Sulla derivazione per serie*. Questi Rendiconti, 1° sem. 1915, pp. 204-206.

(3) *Successioni di curve e derivazione per serie*, Nota I. Questi Rendiconti, 1° semestre 1916, pp. 22-30.