ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Come si vede, la legge di reciprocità era verificata anche in questo caso; anzi l'azione del campo era molto sensibile.

Ripreso infine il prisma di bismuto, fornito dei due elettrodi laminari A″ B″, facendo entrare ed uscire per essi la corrente, ho esaminato la loro differenza di potenziale col campo diretto e col campo inverso. Ho trovato, come la teoria richiede, che la differenza di potenziale non mutava all'invertire del campo.

Matematica. — *Sulla derivazione per serie.* Nota di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA [1].

1. Il prof. Fubini ha recentemente dimostrato il seguente teorema [2]:

Se $u(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$ *è una serie convergente di funzioni monotòne, per es. non decrescenti, definite in un intervallo* $(a \leq x \leq b)$, *ivi è quasi dappertutto lecita la derivazione per serie; cioè quasi dappertutto vale la*

$$u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x).$$

In altre parole:

1°) il gruppo dei punti ove non esiste oppure non è finita anche una sola delle $u'(u)$, $u'_n(x)$;

2°) il gruppo dei punti ove $\sum_1^\infty u'_n(x)$ non converge;

3°) il gruppo dei punti ove non è $u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x)$

sono aggregati di misura nulla.

Poco dopo il Tonelli, mediante considerazioni geometriche piuttosto laboriose, riusciva a dimostrare [3] un teorema che può enunciarsi così:

Supposto: 1°) *che la* $\sum_1^\infty u_n(x)$ *converga in* (ab), *quasi dappertutto verso una funzione* $u(x)$; 2°) *che tanto le* $u(x)$ *quanto le* $u_n(x)$ *siano funzioni a variazione limitata nel detto intervallo*; 3°) *che la serie delle derivate (considerate là dove esistono)* $\sum_1^\infty u'_n(x)$ *sia quasi dappertutto convergente; sarà, quasi dappertutto,*

$$u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1916.

(2) *Sulla derivazione per serie.* Questi Rendiconti, 1° sem. 1915, pp. 204-206.

(3) *Successioni di curve e derivazione per serie*, Nota I. Questi Rendiconti, 1° semestre 1916, pp. 22-30.

Da questo teorema il Tonelli ha poi dedotto, come caso particolare, quello del Fubini ricordato più sopra.

Noi qui seguiremo la via inversa; prenderemo, cioè, le mosse dal teorema del Fubini per arrivare a stabilire una proposizione simile a quella del Tonelli.

Le condizioni che dovremo porre sono forse alquanto più restrittive di quelle poste dal Tonelli, pur potendo in molti casi coincidere; il nostro teorema ha però il vantaggio di potersi dimostrare in un modo estremamente semplice, che potrà forse permettere di dare al teorema stesso un'ulteriore estensione [1].

Daremo poi la dimostrazione d'un altro teorema, che può presentare un qualche interesse.

2. Il teorema cui accennavamo poco fa è il seguente:

Se i termini $u_n(x)$ della serie convergente

$$u(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$$

sono funzioni a variazione limitata in (a, b); e se, indicando con A *una costante finita e positiva e con* V_n *la variazione totale della $u_n(x)$ in (a, b), sussiste la relazione*

$$\sum_1^\infty V_n < A, \tag{1}$$

sarà, quasi dappertutto,

$$u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x).$$

Indicando con $V_n(x)$, $P_n(x)$, $Q_n(x)$ rispettivamente la variazione totale, positiva e negativa di $u_n(x)$ nell'intervallo (a, x), potrà porsi, per la nota proprietà delle funzioni a variazione limitata:

$$u_n(x) - u_n(a) = P_n(x) - Q_n(x), \tag{2}$$

[1] Il Tonelli nella Nota II (*Successioni di curve e derivazione per serie.* Questi Rend., 1° sem. 1916, pp. 85-91), s'era proposto di dimostrare che la 3ª condizione posta nel suo teorema è affatto superflua perchè conseguenza delle altre due; che si può cioè prescindere dall'ipotesi sulla convergenza delle serie derivate. Il suo teorema però, così modificato, cessa di esser vero; per convincersene, basta ricordare il classico esempio di Abel: la serie

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

soddisfa alle condizioni 1ª, e 2ª, del suo teorema; ciò nondimeno, la serie delle derivate

$$\sum_1^\infty \cos nx$$

è divergente!

e quindi anche

$$u(x) - u(a) = \sum_1^\infty P_n(x) - \sum_1^\infty Q_n(x) . \tag{3}$$

E poichè

$$P_n(x) + Q_n(x) = V_n(x) \leq V_n ,$$

sarà, per la (1),

$$\sum_1^\infty P_n(x) + \sum_1^\infty Q_n(x) < A .$$

Le due serie del primo membro dovranno essere convergenti, essendo le $P_n(x)$ e $Q_n(x)$ funzioni positive; potremo perciò porre

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_1^\infty P_n(x) \\ \psi(x) &= \sum_1^\infty Q_n(x) , \end{aligned} \tag{4}$$

dove $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ saranno due funzioni finite in (a, b). E poichè le $P_n(x)$ e $Q_n(x)$ sono anche funzioni mai decrescenti, potremo applicare alle due serie precedenti il teorema di Fubini: avremo così dalle (4), quasi dappertutto,

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = \sum_1^\infty [P'_n(x) - Q'_n(x)] ;$$

ed anche, derivando la (2),

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x) : \tag{5}$$

la serie $\sum_1^\infty u'_n(x)$ sarà quindi, quasi dappertutto, convergente.

Combinando le (4) e (3), si ha poi mediante derivazione,

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = u'(x) ;$$

e quindi, per la (5), quasi dappertutto,

$$u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x) .$$

3. Passiamo ora a dimostrare l'altro teorema:

Se i valori assoluti dei rapporti incrementati dei termini $u_n(x)$ della serie convergente

$$u(x) = \sum_1^\infty u_n(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

ammettono in (a, b) *un limite superiore* L_n *finito, e se inoltre la serie* $\sum_1^\infty L_n$ *è convergente, sarà, quasi dappertutto,*

$$u'(x) = \sum u'_n(x).$$

Sia C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ una successione di costanti positive, soddisfacenti alla condizione

$$C_n \geq L_n,$$

ed inoltre tali che la serie $\sum_1^\infty C_n$ sia convergente; per le ipotesi poste, di successioni siffatte ne esisteranno infinite.

Posto allora

$$\sum_1^\infty C_n = C, \tag{6}$$

potremo scrivere

$$u(x) + Cx = \sum_1^\infty \{u_n(x) + C_n x\}.$$

I termini della serie sono funzioni di x non decrescenti; pel teorema del Fubini sarà allora, quasi dappertutto,

$$u'(x) + C = \sum_1^\infty [u'_n(x) + C_n];$$

e, per la (6),

$$u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x).$$

Il teorema è quindi dimostrato.

Astronomia. — *Osservazioni di pianetini fatte nel 1915 all'equatoriale Dembowski di 187 mm. del R. Osservatorio di Padova.* Nota di B. Viaro, presentata dal Socio E. Millosevich.

Nella presente Nota sono date le osservazioni dei pianetini:

(4) Vesta, (19) Fortuna, (313) Chaldaea,
(128) Nemesis, (48) Doris, (29) Amphitrite,
(113) Amalthea, (108) Hecuba, (11) Parthenope,
(704) Interamnia, (354) Eleonora,

e le posizioni medie delle relative stelle di confronto.

Insieme a queste osservazioni, eseguite nel 1915, ne vengono pubblicate 16, relative al pianeta (354) *Eleonora*, la cui opposizione ebbe luogo verso il 6 dicembre, e perciò fu osservabile tanto alla fine del 1915 quanto al principio del 1916.