ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Balistica. — *Alcune formole di balistica esterna con speciale riguardo al problema della correzione del tiro.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI.

I problemi fondamentali della balistica esterna sono quelli di costruire la traiettoria di un dato proietto con determinate condizioni iniziali, e quello di correggere il tiro per uno spostamento del bersaglio. E notiamo che questo secondo problema non ha minore importanza del precedente; perchè conosciuti anche soltanto in modo approssimato i dati iniziali corrispondenti al bersaglio da colpire, la risoluzione del secondo problema permette di correggere in modo razionale tali dati con pochi colpi di aggiustamento. Tali problemi sono risoluti in modo sufficientemente approssimato per il pratico nel caso di tiri tesi: la nostra guerra in alta montagna dimostrò, a quanto mi si disse, l'insufficienza dei metodi soliti nel caso di traiettorie molto curve e di forti dislivelli tra origine e bersaglio. Per ciò che riguarda il problema della costruzione della traiettoria un metodo molto approssimato è quello di scomporla in archi [quello p. es. dove la velocità v non supera 240 m. s., in cui la resistenza dell'aria è proporzionale a v^2; quello, ove $v > 340$, in cui la resistenza è quasi una funzione lineare di v; e, per l'intervallo $240 < v < 340$, integrando l'equazione dell'odografa, p. es. considerandola come un'equazione alle differenze finite] (¹). Io qui mi occuperò principalmente del problema della correzione del tiro. Nel § 1 darò un metodo, che p. es. potrà servire al pratico per studiare come variano i coefficienti balistici ridotti del Siacci lungo una traiettoria; e troverò la formola di correzione, che sola si può dedurre dalle formole del Siacci, quando si ammetta per il β principale l'ipotesi del Parodi; nel § 2 troverò una formola *di correzione* del tiro, valida in tutti i casi senza bisogno di ipotesi sussidiarie; il metodo della *falsa origine*, che vi uso, è suscettibile delle più svariate applicazioni, che io accenno al § 3. Nel § 4 deduco per nuova via tale formola, che si traduce in un'equazione alle derivate parziali (che ritengo nuova) per le gittate orizzontali e verticali; e ne deduco nuove e più approssimate formole di correzione.

§ 1. *Le formole del Siacci e una prima formola di correzione del tiro.* — Indicando al solito con V la velocità iniziale, con φ l'angolo di

(¹) A tale problema dedicherò un'altra Nota, in cui verranno svolti nuovi metodi di calcolo approssimato.

proiezione, con u la pseudovelocità, con θ l'inclinazione della traiettoria, con C' i varii coefficienti balistici ridotti, le equazioni del Siacci sono:

$$(1) \qquad x = C_x' [D(u) - D(V)] ;$$

$$(2) \qquad \frac{y}{x} - \operatorname{tg} \varphi = - \frac{C_\varepsilon'}{2 \cos^2 \varphi} \left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V) \right]$$

$$(3) \qquad \operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \varphi = - \frac{C_\theta'}{2 \cos^2 \varphi} [J(u) - J(V)] .$$

I varii C' sono in prima approssimazione riguardati come costanti ed uguali tra di loro; negli studii del Gener. Parodi sulla linea di ugual angolo di partenza, essi vengono considerati come costanti lungo un arco di traiettoria, ma variabile da traiettoria a traiettoria: altri perfino li considera costanti lungo una stessa verticale! Nella dimostrazione della formola di correzione del Parodi si trascurano delle quantità non ben definite, si compensano errori non ben noti in modo, che non pare soddisfacente ad un teorico. D'altra parte si applicano poi i risultati ottenuti anche al caso di forti dislivelli tra arma e bersaglio, mentre in generale le tavole di tiro sono calcolate per bersagli posti alla stessa altezza dell'arma. Procedimenti tutti, che mi sembra necessario sostituire con altri logicamente più accettabili.

Non pare p. es. ammissibile senz'altro che nel caso di forti dislivelli si possano considerare i coefficienti balistici ridotti come costanti lungo una stessa traiettoria. Io cercherò di rendere questo fatto evidente, studiando p. es. C_θ'. L'equazione dell'odografa

$$g\, d(v \cos \theta) = \frac{\delta_y i}{C} v F(v)\, d\theta$$

[C = coefficiente balistico; δ_y = densità dell'aria all'altezza y; i = coefficiente di forma; $F(v)$ = funzione resistente; v = velocità del proietto; $u = \frac{v \cos \theta}{\cos \varphi}$] si può scrivere

$$g\, du = \frac{\delta_0 i}{C \cos \varphi} \left[\frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{v F(v)}{u F(u)} \right] u F(u)\, d\theta = \frac{\delta_0 i}{C} \left[\frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{K(v)}{K(u)} \right] \cos^2 \varphi \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} u F(u)$$

$$K(u) = \frac{1}{u^2} F(u) ;$$

cioè, posto $\xi_2(\theta) = \int_\theta^0 \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}$,

$$(4) \qquad \xi_2(\theta) - \xi_2(\varphi) = - \frac{C}{2 i \delta_0 \gamma \cos^2 \varphi} [J(u) - J(V)]$$

ove con γ indico un valore intermedio di $\frac{\delta_y}{\delta_0}\frac{K(v)}{K(u)}$, con $J(u)$ la solita funzione di Siacci $-2g\int_u \frac{du}{F(u)}$.

Se noi, seguendo il Siacci, indicassimo con β un valore intermedio di $\frac{\delta_y}{\delta_0}\frac{K(v)}{K(u)}\frac{1}{\cos\theta}$, otterremmo la (3) al posto di (4), quando si ponga:

$$C_\theta' = \frac{C}{\delta_0 i\beta}.\ \text{Similmente scriveremo}\ C_\theta'' = \frac{C}{\delta_0 i\gamma}\ (^1).$$

Analiticamente ciò corrisponde soltanto ad un cambiamento di funzione incognita; cioè all'incognita θ si è sostituita l'incognita γ. Se io considero la (4) come definente la γ, si vede che l'equazione dell'odografa diventa:

$$\frac{d\left[\frac{1}{\gamma}\{J(u)-J(V)\}\right]}{du} = -2\frac{\delta_0}{\delta_y}\frac{g}{u^3 K(v)} \tag{5}$$

che dà $\gamma = \text{cost}$, se si suppone $\delta_0 = \delta_y$, $K(u) = K(v)$. E il *coefficiente* β *del Siacci soddisfa a un'equazione dello stesso tipo, di forma lievemente più complicata*. La (5) dice dunque come varia γ, ossia come varia C''; in modo simile si vedrebbe come variano C_α', C_t', C_θ'. Ora nei punti ove $\frac{\delta_y}{\delta_0}$ è differente sensibilmente da 1 (punti molto elevati), o dove v dista sensibilmente da u non si vede come, neanche in un piccolo intorno, tali coefficienti possano considerarsi come costanti, *anche se*, come suppone il Parodi, *ci limitiamo a muoverci lungo una stessa traiettoria*. E questi casi, ritenuti come *eccezionali*, diventano la *regola* nei tiri a grandi altitudini con grandi angoli di proiezione.

La (5) al pratico potrà dare un'indicazione sommaria del come varii un coefficiente balistico lungo un piccolo arco di traiettoria; il teorico osservi che, integrando le (4), (5) con approssimazioni successive (ciò che è ben noto essere lecito) si potrà calcolare la θ con qualsiasi approssimazione. *Il valore di* θ *dedotto da* (4) *con* $\gamma = 1$ $\left(\text{oppure da (2) con } C' = \frac{C}{i\delta\beta}, \beta = \frac{1}{\cos\varphi}\right)$ *rappresenta la prima approssimazione*; la (5) darebbe, integrando, un nuovo valore di γ, che, sostituito in (4), permetterebbe di dedurne θ con approssimazione maggiore. E così via.

(1) Un valore approssimato di β è $\frac{1}{\cos\varphi}$; un valore approssimato di γ è 1 (anche se φ è molto grande); almeno per velocità non superiore a 300 ms. l'uso di C'' pare più conveniente dell'uso di C'; in ogni modo non è difficile passare dall'uno all'altro. Uso del C'', anzichè del C' *soltanto perchè esso soddisfa a un'equazione differenziale più semplice ed ha un valore iniziale indipendente da* φ.

Il metodo di Siacci si può dunque considerare soltanto come la sostituzione del solo primo termine alla serie, che viene data dal classico metodo delle approssimazioni successive. E appare assai dubbioso pertanto che questo sia lecito per tiri molto curvi [1]. Probabilmente si potrebbero migliorare tali formole, studiando la (5) e le equazioni analoghe per i varii C'; sostituendo poi nelle (1), (2), (3) al posto dei C' delle convenienti funzioni di u. Ma io dubito che valga la pena di continuare per questa via; altri e ben più rapidi metodi possono servire (Vallier, Cranz, ecc.) a definire analiticamente le traiettorie! [2].

Il calcolo migliore per dare, senza inutili e imprecise ipotesi, una formola di correzione del tiro conforme ai metodi classici della balistica di Siacci è il seguente. Consideriamo le (1) e (2), in cui si supponga dato a C' uno *stesso* valore (ipotesi approssimata usuale) *costante* (all'incirca) lungo un piccolo arco di traiettoria, e precisamente uguale a $\dfrac{\Gamma}{\cos^n \varphi}$ lungo la traiettoria con l'angolo di proiezione φ.

Questa ipotesi (che aggiungiamo alle altre del Siacci) è la più spontanea generalizzazione delle ipotesi usuali; e, *per quanto io la ritenga poco ammissibile*, voglio far vedere che da essa sola, senza altre ammissioni, si può dedurre una formola di correzione del tiro.

Sarà $n = 0$, se, come fanno taluni balistici, si suppone potersi ammettere $C' = \text{cost}$ in un intorno del punto considerato; $n = \frac{1}{2}$ se, col Parodi, si suppone C' proporzionale a $\sqrt{\sec \varphi}$; $n = 1$, se si ammette C' proporzionale a $\sec \varphi$ [3]; ecc. ecc. La (1) dà

$$\mathrm{D}(u) - \mathrm{D}(\mathrm{V}) = \frac{1}{\Gamma}\, x \cos^n \varphi\,,$$

donde

$$dD = \frac{1}{\Gamma}\left(\cos^n \varphi\, dx - n\, x \cos^{n-1} \varphi \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi\right). \tag{6}$$

[1] Il pratico usa le formole Siacci anche nel caso di φ prossimo a 45°; e assicura che le formole vanno bene, ma si noti che vi compaiono dei coefficienti β, che si determinano appunto in modo da metter d'accordo formole e dati sperimentali. Naturalmente così si aggiusta tutto, *ma soltanto per quel determinato dislivello* tra origine e bersaglio, che si è avuto nelle esperienze (*nullo* nei calcoli del Siacci).

[2] Alcuni cercano ora, per tiri contro velivoli ecc., di dare delle tavole a doppia entrata, che terrebbero luogo della tavola balistica generale del Siacci; ma, se si vogliono usare tavole cosiffatte, sarebbe assai più opportuno costruirle per gli integrali usati da Cranz ecc., abbandonando per tiri non tesi, ogni generalizzazione delle (1), (2), (3). In una prossima Nota darò però un nuovo metodo, che ricorre a tavole a semplice entrata, cioè a funzioni di *una sola* variabile; le quali coincidono quasi tutte con quelle del Siacci.

[3] Ciò avviene nell'intorno dell'origine; Parodi suppone $n = \frac{1}{2}$ nel punto di caduta: ciò che forse è lecito in una prima approssimazione.

Poichè $dA(u) = J(u)\,dD(u)$, la (2) dà, differenziando, e riducendo con le (1), (6):

$$\left(\frac{dy}{x} - \frac{y}{x}\frac{dx}{x}\right)\cos^{n+2}\varphi - d\,[\operatorname{sen}\varphi\cos^{n+1}\varphi] + \frac{y}{x}\,d(\cos^{n+2}\varphi) =$$

$$= -\frac{\Gamma}{2}\left\{\frac{J(u)}{D(u) - D(V)} - \frac{A(u) - A(V)}{[D(u) - D(V)]^2}\right\} dD(u)$$

$$= -\frac{\Gamma}{2}\left\{J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}\right\}\frac{\Gamma}{x\cos^n\varphi}\,\frac{1}{\Gamma}\,(\cos^n\varphi\,dx - nx\cos^{n-1}\varphi\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi).$$

Il valore $C' = \dfrac{\Gamma}{\cos^n\varphi}$, per cui valgono le (1), (2), si dirà, secondo la terminologia del Siacci, il C′ *principale*. Indicheremo con θ' il valore di θ, che si deduce da (3), sostituendo il C′ principale al C_θ'. Dalle (2), (3) si deduce:

$$\operatorname{tg}\theta' - \frac{y}{x} = -\frac{\Gamma}{2\cos^{n+2}\varphi}\left[J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}\right], \tag{7}$$

cosicchè l'uguaglianza precedente diventa:

$$\left(\frac{dy}{x} - \frac{y}{x}\frac{dx}{x}\right)\cos^{n+2}\varphi - d\,[\operatorname{sen}\varphi\cos^{n+1}\varphi] + \frac{y}{x}\,d(\cos^{n+2}\varphi) =$$

$$= \cos^2\varphi\left(\operatorname{tg}\theta' - \frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}\,(\cos^n\varphi\,dx - nx\cos^{n-1}\varphi\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi)$$

ossia

$$(dy - \operatorname{tg}\theta'\,dx)\cos^{n+2}\varphi = x\,d\,[\operatorname{sen}\varphi\cos^{n+1}\varphi] + n(y - x\operatorname{tg}\theta')\cos^{n+1}\varphi\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi$$
$$- y\,d(\cos^{n+2}\varphi)$$

donde

$$d\varphi = \frac{dy - \operatorname{tg}\theta'\,dx}{x\,\{1 - (n+1)\operatorname{tg}^2\varphi\} + (n+2)\,y\operatorname{tg}\varphi + n(y - x\operatorname{tg}\theta')\operatorname{tg}\varphi} \tag{8}$$

ossia

$$d(\operatorname{tg}\varphi) = \frac{dy - \operatorname{tg}\theta'\,dx}{x(\cos 2\varphi - n\operatorname{sen}^2\varphi) + (\frac{1}{2}n + 1)\,y\operatorname{sen}2\varphi + \frac{1}{2}n(y - x\operatorname{tg}\theta')\operatorname{sen}2\varphi} \tag{8}^{bis}$$

che diventa specialmente semplice se $n = 0$ (caso del movimento nel vuoto). Da queste si passa alla correzione dell'angolo α di elevazione, notando che $\varphi = \alpha + \varepsilon + \varrho$, dove $\varepsilon = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} =$ angolo di sito, $\varrho =$ rilevamento $=$ $=$ costante. Se ne deduce

$$d\alpha = d\varphi - d\varepsilon = d\varphi - \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}. \tag{8}^{ter}$$

Le (8), $(8)^{bis}$, $(8)^{ter}$ mi sembrano le uniche formole per la correzione del tiro, che si possano nelle nostre ipotesi logicamente dedurre dalle classiche formole del Siacci. Esse appaiono però profondamente *differenti* dalle formole del Parodi (che suppone $n = \frac{1}{2}$), che pure parte da ipotesi analoghe!

D'altra parte si noti che nelle (8) ogni traccia del coefficiente balistico ridotto del proietto è sparita; la resistenza dell'aria vi compare soltanto per mezzo di un coefficiente n, che si sceglie sempre lo stesso, sia per velocità piccole che grandi, a cui corrispondono resistenze di tipo tanto differente!

Quando all'angolo θ' che vi compare, si noti che, poichè $d\varphi = 0$ quando il bersaglio si sposta sulla traiettoria del proietto (come è ben evidente), dev'essere in tal caso $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta'$ almeno in via approssimata. L'angolo θ' dato dalla (3), sostituendo il C' principale a C_θ', deve essere dunque prossimo all'inclinazione θ della traiettoria. Cioè le 3 formole del Siacci dovrebbero, anche nel caso di tiri molto curvi, rappresentare bene le particolarità del percorso balistico con *uno stesso* valore di β, o di C'! (1).

Tutto questo *permette a un teorico di elevare gravi dubbii sull'esattezza di formole del tipo precedente*, e consiglia di affrontare *ex-novo* e per altra via il problema della correzione del tiro. Se si volesse percorrere la via precedente con ogni rigore, bisognerebbe trovare le equazioni differenziali analoghe alla (5), a cui soddisfano i varii C': anzi si dovrebbe studiare l'equazione differenziale relativa al C' principale: cosa complicata e poco pratica!

§ 2. *Formola per la correzione del tiro.* — Di formole a questo scopo se ne possono dare parecchie, secondo i metodi con cui sono costruite le tavole di tiro. La correzione del tiro si effettua generalmente, facendo variare l'angolo di proiezione; *per mettermi nelle condizioni più sfavorevoli*, supponiamo di avere una tavola di tiro ad angolo fisso, e carica variabile, tavole che so essere già state proposte da qualche nostro ufficiale, e che sono anche realizzate in qualche modo dalle nostre usuali tavole di tiro, in cui sono dati gli elementi corrispondenti a più cariche differenti.

Siano dunque calcolate le traiettorie corrispondenti a un angolo di proiezione φ, e alle varie velocità iniziali V. Voglio vedere l'effetto prodotto, quando l'angolo di proiezione φ diventa $\varphi + d\varphi$. Notiamo che sparare dall'origine O con velocità V ed angolo $\varphi + d\varphi$ equivale a sparare da quel

(1) Se questo non avvenisse, le (8) e seg., anzichè servire a correggere il tiro per un dato spostamento del bersaglio, correggerebbero soltanto l'errore commesso dall'autore nelle varie ipotesi fatte circa il coefficiente balistico.

Se l'ipotesi del Parodi è lecita *in pratica*, varrà forse meglio applicare le $(8)^{bis}$, $(8)^{ter}$ per il calcolo del coefficiente C_2 del Parodi per i punti *prossimi* al punto di caduta. Io credo poco esatta la sua applicazione nel caso di forti dislivelli.

punto O′ della traiettoria (dove l'inclinazione ha il valore φ) con la velocità acquistata dal proietto nel passare dal punto O al punto O′. Questa velocità sarà $V - dv$, ove dv è un infinitesimo, che ha lo stesso segno di $d\varphi$. [Notisi che, se $d\varphi < 0$, il punto O′, piuttosto che sulla traiettoria, è posto sul prolungamento di questa al di qua dell'origine O]. Dunque, per calcolare la traiettoria $(V, \varphi + d\varphi)$ corrispondente alla velocità iniziale V e all'angolo di proiezione $\varphi + d\varphi$, basterà calcolare la traiettoria $(V - dv, \varphi)$, aggiungendo poi alle coordinate di tutti i suoi punti le coordinate di O′ rispetto ad O.

Se il bersaglio raggiunto con la traiettoria (V, φ) era il punto x_0, y_0, si tratti di determinare $d\varphi$ in guisa che la traiettoria $(V, \varphi + d\varphi)$ raggiunga il bersaglio $x_0 + dx$, $y_0 + dy$. Dette ξ, η le coordinate di O′, ciò dunque equivale a cercare che la traiettoria $(V - dv, \varphi)$ raggiunga il bersaglio $x_0 + dx - \xi$, $y_0 + dy - \eta$ [1]. La traiettoria (V, φ) abbia per tangente nel punto (x_0, y_0) la retta $y - y_0 = (x - x_0) \operatorname{tg} \theta$; in un intorno del punto (x_0, y_0) alla traiettoria potremo sostituire questa retta; sia

$$(y - y_0) = \operatorname{tg} \theta (x - x_0) - \{a(x - x_0) + b\} dV$$

l'equazione corrispondente per la traiettoria $(V - dV, \varphi)$. Posto $y = y_0$, si deduce, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, $x - x_0 = - dX = \frac{b}{\operatorname{tg} \theta} dV$; cioè l'incremento $-dX$ di gittata sul piano $y = y_0$, corrispondente all'incremento $-dV$ di velocità iniziale vale $\frac{b}{\operatorname{tg} \theta} dV$; quindi, se dX *è l'incremento di gittata corrispondente all'incremento* dV *di velocità iniziale*, sarà $b = -\operatorname{tg} \theta \frac{dX}{dV}$ (dove, si noti, $-\operatorname{tg} \theta$ *sul ramo discendente della traiettoria è positivo*). Per es., se il bersaglio è sulla stessa orizzontale del pezzo, è $-\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \omega$, dove ω è l'angolo di caduta. I valori di $\operatorname{tg} \theta$, di $\frac{dX}{dV}$ si ricaveranno dalla tavola di tiro; il coefficiente b si può supporre pertanto noto a chi possegga tale tavola. Dovremo cercare $d\varphi$ in guisa che $x_0 + dx - \xi$, $y_0 + dy - \eta$ giaccia sulla retta ultimamente citata, che cioè sia

$$dy - \eta = \operatorname{tg} \theta (dx - \xi) - b\, dV$$

(formola ottenuta trascurando infinitesimi d'ordine superiore).

[1] Veramente si dovrebbe tener conto della differente densità dell'aria nei punti O, O′; ma, se ci limitiamo a piccole correzioni, ci troviamo di fronte ad una quantità *certamente* trascurabile.

Ora, per le stesse equazioni differenziali del movimento di un proietto, è:

$$g \cos\varphi\, dv = v \left\{ g \operatorname{sen}\varphi + \frac{\delta i}{C} F(v) \right\} d\varphi \qquad C = \text{coefficiente balistico}$$

$$g\xi = + v^2 d\varphi \quad ; \quad g\eta = v^2 \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi .$$

La nostra equazione diventa:

$$dy = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi + \operatorname{tg}\theta \left[dx - \frac{v^2}{g} d\varphi \right] - b \frac{v\left[g \operatorname{sen}\varphi + \frac{\delta i}{C} F(v) \right]}{g \cos\varphi} d\varphi$$

donde

$$(9) \qquad d\varphi = g \frac{dy - \operatorname{tg}\theta\, dx}{V^2(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta) - bV\left(g \operatorname{tang}\varphi + \frac{\delta i}{C} F(V) \frac{1}{\cos\varphi} \right)} .$$

Con la $(8)^{ter}$ si passa dalla correzione $d\varphi$ alla correzione $d\alpha$ per la elevazione. La (9) è stata ottenuta *trascurando gli infinitesimi del secondo ordine* senza altra ipotesi sussidiaria.

Come controllo, osserviamo che nel vuoto, per bersagli posti all'orizzontale uscente dall'arma, si ha: gittata $= X = \frac{V^2}{g} \operatorname{sen} 2\varphi$; $\omega = \varphi$. Cosicchè $b = 2 \frac{V}{g} \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{tg}\varphi$. È poi $F(V) = 0$; cosicchè la (9) diventa:

$$d\varphi = \frac{dy - \operatorname{tang}\theta\, dx}{X \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

in completo accordo con la $(8)^{bis}$ ove si ponga $n = 0$.

La (9) appare dunque accettabile tanto più volentieri, che essa vale anche nel vuoto [cfr. il § 4 per nuove formole di correzione e nuove interpretazioni della (9)].

Formole più approssimate potremmo ottenere con lo stesso procedimento, sostituendo parabole alle linee rette con cui abbiamo rappresentato l'arco iniziale e l'arco finale della traiettoria. — Soltanto l'esperienza può dire se sia conveniente, o no, raggiungere questa migliore approssimazione teorica. Formole analoghe *si hanno per la correzione del tiro con variazione di carica.*

In ogni modo io propongo per la correzione dei tiri curvi o con forti dislivelli di abbandonare i metodi usuali, ma di usare o la (9), o quella formola analoga più approssimata, che, come dicemmo, si può ottenere con analogo procedimento.

§ 3. *Altre applicazioni del metodo precedente.* — Il metodo di una falsa origine O′ può ricevere anche altre applicazioni. Esso si basa sul principio che per trovare una traiettoria $(\varphi + \Delta\varphi, V)$ uscente da O basta aggiungere le coordinate di una *falsa origine* O′ alle coordinate dei punti di una traiettoria $(\varphi, V - \Delta V)$. Il punto O′ è il punto della traiettoria iniziale, dove l'inclinazione ha il valore φ; e $V - \Delta V$ è la velocità del proietto nel punto O′. Noi potremmo dedurne altre formole di correzione del tiro corrispondenti ad altri tipi di tavole di tiro. Ma esso si presta anche a calcoli di altro genere, che non siano le piccole correzioni. Noi possiamo p. es. con esso da una tavola di tiro ad angolo fisso, dedurre una tavola a carica fissa, cioè a velocità iniziale V costante; e viceversa; noi possiamo da una tavola di tiro che ci dia i risultati sperimentali quando il bersaglio è all'orizzonte del pezzo *passare a una tavola di tiro relativamente a bersagli* B′ *posti ad altitudine maggiore*, scegliendo per ogni traiettoria come *falsa origine* quel punto O′ che è alla stessa altezza di B′. E così via. Naturalmente in queste correzioni non piccolissime si dovrà tener conto della differente densità dell'aria all'origine vera ed alla falsa origine. I calcoli numerici, che *si riducono a calcolare l'arco* OO′ *di traiettoria* (l'ho verificato io stesso su esempi particolari) riescono abbastanza facili; essi sono poi di una grandissima semplicità per non troppo grandi differenze di velocità nella vera e nella falsa origine: p. es. quando queste due velocità sono entrambe maggiori di 400 ms., oppure comprese p. es. entrambe tra 240 e 285 ms., e così via: in una parola quando le due velocità sono comprese in un intervallo, in cui la resistenza dell'aria si possa esprimere con una stessa funzione analitica della velocità (lineare, oppure proporzionale ad una potenza della velocità). Ho dato un esempio al § 2; soltanto la pratica può suggerire quali altri problemi si debbano affrontare per questa via, cioè per quali calibri e per quali dislivelli sia meglio sviluppare i calcoli numerici. Si potrebbe costruire p. es. una serie di tavole corrispondenti ai dislivelli di 0, 500, 1000, 1500, 2000 m. tra cannone e bersaglio.

§ 4. *Nuovo enunciato della formola data al* § 2 *in un caso particolare.* — Se noi poniamo in tale formola $dy = 0$, essa ci dà l'incremento $d\varphi$ dell'angolo di proiezione corrispondente *all'incremento* dx (o, come diremo, dX) *di gittata sul piano* $y =$ cost corrispondente a una stessa velocità iniziale V; tale formola permette cioè di calcolare $\dfrac{\partial X}{\partial \varphi}$.

Se ricordiamo che $b = -\operatorname{tg}\theta \dfrac{\partial X}{\partial V}$, troviamo che dalla nostra formola si deduce (entro i limiti di approssimazione [1]) da noi imposti al calcolo):

[1]) che in fondo si riducono a trascurare le variazioni di δ.

La gittata X *su un qualunque piano orizzontale* $y=\mathrm{cost}$, *pensata come funzione dei dati iniziali* V, φ, *soddisfa all'equazione*:

$$(10)\qquad V^2\left(1-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\theta}\right)=g\frac{\partial X}{\partial\varphi}+\frac{\partial X}{\partial V}V\left[g\operatorname{tang}\varphi+\frac{\delta i}{C}\frac{F(V)}{\cos\varphi}\right].$$

È una formola affatto analoga si può dedurre per l'altitudine Y *raggiunta su un piano verticale* $x=x_0$ *prefissato ad arbitrio.*

Ora noi possiamo dimostrare, o, meglio, verificare direttamente quest'ultima formola, che lega le variazioni di gittata su un piano qualsiasi orizzontale corrispondente a variazioni dei dati iniziali φ, V. Infatti dalle

$$y=\frac{-1}{g}\int_{\varphi}^{\theta_1}v^2\operatorname{tg}\theta\,d\theta\qquad X=-\frac{1}{g}\int_{\varphi}^{\theta_1}v^2\,d\theta$$

(dove con θ_1 si è indicato il valore di θ nel punto di arrivo) si deduce che X ed y possono pensarsi funzioni di V,φ,θ_1 (perchè v dell'equazione della odografa si deduce come funzione di V,φ,θ). Ora

$$-g\frac{\partial y}{\partial\theta_1}=v^2\operatorname{tg}\theta_1\,,\quad -g\frac{\partial y}{\partial V}=\int_{\varphi}^{\theta_1}\frac{\partial(v^2)}{\partial V}\operatorname{tg}\theta\,d\theta\,.$$

$$-g\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-V^2\operatorname{tg}\varphi+\int_{\varphi}^{\theta_1}\frac{\partial(v^2)}{\partial\varphi}\operatorname{tg}\theta\,d\theta\,.$$

Poichè la y si riguarda come costante, dalla $y=\mathrm{cost}$ si potrà dedurre θ_1 come funzione di V,φ; e si avrà:

$$d\theta_1=-\frac{1}{v^2\operatorname{tg}\theta_1}\left\{\left[\int_{\varphi}^{\theta_1}\frac{\partial(v^2)}{\partial V}\operatorname{tg}\theta\,d\theta\right]dV+\right.$$

$$\left.+\left[-V^2\operatorname{tg}\varphi+\int_{\varphi}^{\theta_1}\frac{\partial(v^2)}{\partial\varphi}\operatorname{tg}\theta\,d\theta\right]d\varphi\right\}.$$

Ora X è funzione di $V,\varphi.\theta_1$, essendo θ_1 funzione di V e di φ. Pertanto si trova:

$$\frac{\partial X}{\partial V}=\frac{-1}{g}\int_{\varphi}^{\theta_1}\frac{\partial(v^2)}{\partial V}\left(1-\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta_1}\right)d\theta$$

$$g\frac{\partial X}{\partial\varphi}=V^2\left(1-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\theta_1}\right)-\int_{\varphi}^{\theta_1}\frac{\partial(v^2)}{\partial\varphi}\left(1-\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta_1}\right)d\theta\,.$$

Il secondo membro di (10) diventa pertanto:

$$V^2\left(1-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\theta}\right)-2\int_{\varphi}^{\theta_1}v\left(1-\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta_1}\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{\partial v}{\partial V}V\left[\operatorname{tang}\varphi+\frac{\delta i}{Cg}\frac{F(V)}{\cos\varphi}\right]+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right\}d\theta\,.$$

La (10) risulta verificata, se v, funzione di θ, φ, V, soddisfa alla relazione ottenuta uguagliando a zero l'espressione tra $\{\ \}$, cioè alla

$$(11) \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi} g \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial V} V \left[g \operatorname{sen} \varphi + \frac{\delta i}{C} F(V) \right] = 0$$

(per ogni valore di θ).

Ora ciò è ben evidente, perchè i valori di V e di φ, che fanno corrispondere a uno stesso valore di θ lo stesso valore di v, soddisfano alla

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} g\, d(V \cos \varphi) = \dfrac{\delta i}{C} V F(V)\, d\varphi, \\ \text{ossia} \\ g \cos \varphi\, dV = V \left[g \operatorname{sen} \varphi + \dfrac{\delta i}{C} F(V) \right] d\varphi . \end{array} \right.$$

Ora la (11) dice appunto soltanto questo che il valore di v, corrispondente ad un dato valore di θ, non varia (ha differenziale nullo), quando V, φ variano soddisfacendo alla (12).

La (10) *si può chiamare l'equazione delle gittate su un piano orizzontale qualsiasi; l'equazione analoga per le altitudini* Y *su un piano verticale*

$$(10)^{bis} \qquad V^2(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta) = g \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial Y}{\partial V} V \left[g \operatorname{tang} \varphi + \frac{\delta i}{C} \frac{F(V)}{\cos \varphi} \right]$$

si dimostra in modo simile, e si presta ad analoghe applicazioni.

Per trovare le altre formole di correzione, a cui abbiamo accennato alla fine del § 2, si noti che dalla (10) si può dedurre $\frac{\partial X}{\partial V}$, quando si conosca $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$: cioè si può dedurre da una tavola a carica fissa (a velocità iniziale V fissa) l'effetto $\frac{\partial X}{\partial V} dV$ dovuto ad un cambiamento di carica.

Così, derivando la (10), si ottengono due equazioni tra le $\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial V \partial \varphi}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial V^2}$. Cosicchè, se p. es. è data una tavola di tiro a carica fissa, e sono pertanto calcolabili $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}$ si può dedurre l'effetto $\frac{\partial X}{\partial V} dV + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial V^2} dV^2$ prodotto sulla gittata da un cambiamento di V, cioè da un cambiamento della carica, anche tenendo conto degli infinitesimi del secondo ordine. E ciò con grande semplicità, senza complicare il metodo della falsa origine con parabole od altro. Gli esempi si potrebbero variare a piacere. Ma p. es. non credo valga la pena di dare formole di correzione, che tengano conto degli infinitesimi di ordine superiore al secondo.