ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Sopra una formula commutativa e alcune sue applicazioni.* Nota del Socio GIAN ANTONIO MAGGI.

Chimica-fisica. — *Sui cristalli misti.* Nota del Socio CARLO VIOLA.

Le precedenti Note saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. Secondo il Borel, una serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{1}$$

è *sommabile* quando la serie di potenze *associata*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

è una trascendente intera e l'integrale improprio (*associato*)

$$s = \int_0^{+\infty} e^{-x} u(x)\, dx \tag{3}$$

è convergente. È poi *assolutamente sommabile* quando sono convergenti *assolutamente* tutti gli infiniti integrali impropri

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} u^{(r)}(x)\, dx \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

ove

$$u^{(0)}(x) = u(x) \quad , \quad u^{(r)}(x) = \frac{d^r u}{dx^r} \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

In ogni caso il numero s è la *somma* della serie.

2. Per tutte le serie sommabili sussistono quelle proprietà algoritmiche elementari delle serie assolutamente convergenti che possono sintetizzarsi nelle seguenti uguaglianze:

$$\text{(I)} \qquad (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots) + k = \\ = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + (u_n + k) + u_{n+1} + \cdots,$$

$$\text{(II)} \qquad (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)\, k = ku_0 + ku_1 + ku_2 + \cdots,$$

$$\text{(III)} \qquad (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots) + (v_0 + v_1 + v_2 + \cdots) = \\ = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots.$$

Al contrario, *non* sussistono le altre

$$\text{(IV)} \qquad (u_0 + u_1 + \cdots)(v_0 + v_1 + \cdots) = \\ = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \cdots,$$

$$\text{(V)} \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = u_0 + u_1 + \cdots + u_{r-1} + (u_r + u_{r+1} + \cdots).$$

Ciò indusse il Borel a limitare le sue considerazioni alle serie assolutamente sommabili, per le quali dimostrò esser valide anche queste proprietà.

Ora, in una recente Nota [1], io ho dimostrato che, volendo restringere il campo delle serie sommabili fino a conseguire la validità dell'importante proprietà (IV), non è punto necessario spingersi fino alle serie assolutamente sommabili (le quali formano una classe particolarissima di serie semmabili), ma basta fermarsi alle serie *sommabili* B′, caratterizzate dalla convergenza (semplice) dei primi due integrali (4) soltanto [2].

3. In questa Nota voglio dimostrare che neppure per conseguire la validità della proprietà (V) è necessario spingersi fino alle serie assolutamente sommabili; ma che è sufficiente (ed anche necessario) fermarsi alle serie, che chiamerò *totalmente sommabili*, caratterizzate dalla convergenza *semplice* di tutti gli integrali (4).

Se si osserva che la serie di potenze associata alla serie

$$\text{(8)} \qquad u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \cdots$$

[1] *Nuova trattazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino vol. LII, 1916-1917, pag. 67).

[2] Precisamente ho dimostrato (loc. cit., n. 11) che: *se delle due serie sommabili*

$$\text{(5)} \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

con somma u, v *rispettivamente, una è sommabile* B′, *la serie*

$$\text{(6)} \qquad w_0 + w_1 + w_2 + \cdots, \quad \text{ove} \quad w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0,$$

è sommabile ed ha per somma $w = uv$. *Che se poi ambedue le serie* 5) *sono sommabili* B′, *anche la* (6) *è sommabile* B′.

Ancora: *se le due serie* (5) *sono sommabili, la serie*

$$0 + w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

è sommabile ed ha per somma uv.

è

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_{r+n} \frac{x^n}{n!} = u^{(r)}(x), \tag{9}$$

e che perciò l'integrale (4) ne è l'integrale associato, possiamo anche dire che una serie (1) è totalmente sommabile quando è sommabile insieme con la serie (8), per ogni intero $r > 0$.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè per una serie sommabile (1) *sussista la proprietà* (V) *per ogni intero* $r > 0$, *è che essa sia totalmente sommabile.*

Supponiamo infatti che la (1) sia sommabile con somma s. Affinchè la (V) possa sussistere per ogni $r > 0$, è necessario che sia sommabile la serie (8) che comparisce nel secondo membro, per ogni $r > 0$, e perciò che la (1) sia totalmente sommabile.

Viceversa, se la (1) è totalmente sommabile con somma s, è pure sommabile la (8) per ogni $r > 0$ ed ha per somma il valore σ_r dell'integrale (4). Si ha inoltre

$$s - \sigma_r = \int_0^{+\infty} e^{-x} [u(x) - u^{(r)}(x)]\, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[u_0 + u_1 \frac{x}{1!} + \cdots + u_{r-1} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \right] dx = u_0 + u_1 + \cdots + u_{r-1} \text{ (1)}$$

e perciò la (V) sussiste.

4. Or vogliamo provare che con l'acquisto della proprietà (V), nessuna delle rimanenti proprietà viene perduta; sicchè tutto l'algoritmo delle serie assolutamente sommabili sussiste per la serie totalmente sommabili. Precisamente:

Teorema I. — *Se una delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad , \quad u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + (u_n + k) + u_{n+1} + \cdots$$

è totalmente sommabile, tale è anche l'altra, e fra le loro somme passa la relazione (I).

Teorema II. — *Se una delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad , \quad ku_0 + ku_1 + ku_2 + \cdots \qquad (k \neq 0) \tag{10}$$

è totalmente sommabile, tale è anche l'altra, e fra le loro somme passa la relazione (II).

(1) Si ricordi che, per n intero non negativo, è

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n\, dx = n!$$

Teorema III. — *Se le due serie*

$$(11) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad , \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

sono totalmente sommabili ed hanno per somma u, v *rispettivamente, anche la serie*

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots$$

è totalmente sommabile ed ha per somma $u + v$.

Teorema IV. — *E, nelle stesse ipotesi, anche la serie*

$$(12) \qquad w_0 + w_1 + w_2 + \cdots \quad \text{ove } w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0$$

è totalmente sommabile ed ha per somma uv.

Teorema V. — *Se una delle due serie*

$$(13) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad , \quad u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \cdots$$

è totalmente sommabile, tale è anche l'altra, e fra le loro somme passa la relazione (V).

Le dimostrazioni dei teoremi I, II, III sono ben facili.

Passando al teorema V, osserviamo che, nella seconda parte della dimostrazione del teorema del n. 2, è stato provato che: se la prima delle due serie (13) è totalmente sommabile, tale è anche la seconda.

Viceversa: se per un certo intero fissato $r > 0$, la seconda delle (13) è totalmente sommabile, convergerà l'integrale (4) pel detto valore di r e per tutti i maggiori, e quindi [1] anche per tutti i minori, e perciò anche la prima delle (13) sarà totalmente sommabile. Infine al n. 2 si è dimostrato che fra le somme delle due serie intercede la relazione espressa dalla (V).

Passiamo infine al teorema IV.

Le due serie (11), essendo per ipotesi totalmente sommabili, sono anche sommabili B'; quindi, pel teorema enunciato nella seconda nota al n. 2, possiamo asserire che la serie (12) è sommabile (anzi è sommabile B') e che ha per somma uv. Dunque intanto: *la serie prodotto (di Cauchy) di due serie totalmente sommabili con somma* u, v *rispettivamente è sommabile ed ha per somma* uv.

Per dimostrare che la (12) è anche totalmente sommabile, basta dimostrare che è sommabile per ogni r la serie

$$(14) \qquad w_r + w_{r+1} + w_{r+2} + \cdots$$

[1] Loc. cit., n. 6, lemma II (di Hardy).

Ed infatti, poichè la prima delle (11) è totalmente sommabile, tale sarà pure (pel teorema V) la serie

$$u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \cdots \tag{15}$$

Poichè la (15) e la seconda delle (11) sono totalmente sommabili, possiamo asserire (per quanto abbiamo rilevato più su) che la serie-prodotto a cui dànno origine

$$u_r v_0 + (u_r v_1 + u_{r+1} v_0) + (u_r v_2 + u_{r+1} v_1 + u_{r+2} v_0) + \cdots$$

ossia

$$\begin{aligned} &[w_r - (u_{r-1} v_1 + u_{r-2} v_2 + \cdots + u_0 v_r)] + \\ &\quad + [w_{r+1} - (u_{r-1} v_2 + u_{r-2} v_3 + \cdots + u_0 v_{r+1})] + \cdots \end{aligned} \tag{16}$$

è sommabile.

Intanto, poichè la seconda delle (11) è totalmente sommabile, tali saranno pure (pei teoremi V e II successivamente applicati) le serie

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{r-1} v_1 + u_{r-1} v_2 + u_{r-1} v_3 + \cdots \\ u_{r-2} v_2 + u_{r-2} v_3 + u_{r-2} v_4 + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_0 v_r + u_0 v_{r+1} + u_0 v_{r+2} + \cdots \end{array} \right. \tag{17}$$

Sommando, termine a termine, le serie sommabili (16) e (17), si trova la (14), la quale perciò sarà sommabile.

5. I teoremi precedenti ci permettono di concludere che d'ora innanzi *la considerazione delle serie assolutamente sommabile è inutile* (almeno per la teoria delle serie numeriche), perchè in luogo di esse si possone considerare con vantaggio le serie totalmente sommabili; in quanto che costituiscono una classe di serie più ampia, pur godendo di tutte le proprietà algoritmiche delle prime.

Vi ha di più. Hardy [1] ha dimostrato che vi sono serie convergenti che sfuggono alla sommabilità assoluta, cioè che non sono assolutamente sommabili. Invece: *ogni serie convergente con somma s è totalmente sommabile con ugual somma.*

Infatti se una serie (1) è convergente con somma s, è anche sommabile con ugual somma [2]; ma è pur sommabile la serie (8) per ogni $r > 0$, perchè convergente, dunque la (1) è totalmente sommabile.

[1] Quarterly Journal of Mathematics, vol. 35, 1903, pag. 22.

[2] Ibidem.

6. Se poi ci assoggettiamo a rinunziare ad adoperare la proprietà (V), possiamo considerare con vantaggio molto maggiore le serie sommabili B′, che costituiscono una classe amplissima, appena leggermente più ristretta di quella formata da tutte le serie sommabili. Per le serie sommabili B′ sussistono le proprietà (I), (II), (III) e la (IV) così modificata:

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots) = 0 + w_0 + w_1 + w_2 + \ldots$$

Il rinunziare ad adoperare la proprietà (V) non apporta che svantaggi trascurabili.

Per tutto ciò cfr. la Nota citata.

Fisica terrestre. — *La velocità di propagazione del terremoto ligure del 23 febbraio 1887.* Nota di G. Agamennone e A. Cavasino, presentata dal Socio E. Millosevich.

Farà maraviglia che dopo un trentennio si torni ancora a studiare questo terremoto, che ebbe allora sì triste celebrità e che, avvenuto pochi anni dopo la catastrofe di Casamicciola (1883), indusse ancor meglio il nostro Governo ad incoraggiare ufficialmente gli studî sismici. A suo tempo non mancarono numerose e pregiate pubblicazioni sul predetto terremoto, segnatamente le estese monografie dei professori Issel, Mercalli e Taramelli, ma in tutte venne appena sfiorato il problema della velocità di propagazione. Chi se ne occupò meno fugacemente fu il compianto Tacchini, allora direttore del R. Ufficio centrale di Meteorologia, il quale, nella seduta del 12 giugno 1887, presentò una breve Nota a questa stessa Accademia, e poi il sig. Offret con due Note inserite nei Comptes Rendus dell'Accademia di Francia. Ma i risultati cui pervennero questi due autori, furono quanto mai discordi tra loro, in quanto che al Tacchini risultava una velocità di propagazione sensibilmente costante e che si aggirava sui 2100 metri al secondo, mentre, secondo l'Offret, la medesima cresceva con la distanza in modo notevolissimo, e precisamente da 450 a ben 2070 metri!

Colpito da questa enorme discordanza, uno di noi (Agamennone) si propose di approfondire la questione, ed a tale scopo cominciò col raccogliere numerosissimi dati orarî ed a discuterli uno per uno per trarne il maggior vantaggio possibile. È bensì vero che in quel tempo i dati orarî erano ben lungi dal raggiungere la precisione di quelli che si ottengono pei recenti terremoti, specialmente allora per la mancanza quasi assoluta di strumenti sismici; ma la quantità poteva in parte supplire alla qualità e si poteva ragionevolmente sperare in una tal quale compensazione tra i numerosi dati, ben discussi e raggruppati in varie categorie di precisione diversa. Ma, come