ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 febbraio 1917.

F. D' Ovidio Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una formula commutativa e alcune sue applicazioni.* Nota del Socio Gian Antonio Maggi.

Per la ragione, principalmente, che la formola in discorso serve di fondamento ad una ricerca, che formerà oggetto di una mia prossima Nota, mi permetto, con queste poche righe, di metterne in rilievo alcune circostanze, e di mostrarne l'utilità per la spedita deduzione di alcuni risultati. D'altronde, con questo, trova pure risposta la questione di derivabilità lungo una superficie, accennata da Somigliana, in fine alla seconda delle sue belle Note *Sulla teoria delle distorsioni elastiche* (1).

Intese $\varphi(s, n)$ e $\frac{\partial\varphi(s, n)}{\partial s}$ funzioni limitate e continue, in un campo, di cui il luogo $n=0$ rappresenta un contorno (compreso il contorno medesimo), e indicato con $\lim_n$ il limite, col tendere di n a 0, per valori crescenti o decrescenti, si ha, in primo luogo,

$$\lim_n \frac{\partial\varphi(s, n)}{\partial s} = \frac{\partial \lim_n \varphi(s, n)}{\partial s}. \tag{1}$$

Questa formola traduce semplicemente l'eguaglianza

$$\left[\frac{\partial\varphi(s, n)}{\partial s}\right]_{n=0} = \frac{\partial\varphi(s, 0)}{\partial s},$$

(1) Questi Rendic., vol XVIII, 1a sem. 1914; Nuovo Cimento, vol. XI, 1° sem. 1916.

sotto una forma opportuna per alcune questioni, colle quali si trova certo ripetutamente adoperata.

Abbiasi ora una superficie regolare σ. Immaginiamo su questa superficie un doppio sistema di linee, atte a determinarne i punti, con le loro mutue intersezioni. Concepiamo i punti medesimi rappresentati per mezzo dei relativi parametri u, v, e indichiamo con s_1 e s_2 le misure degli archi delle stesse linee coordinate, aventi per origine un punto stabilito della linea, e per termine il punto considerato. Infine, immaginiamo un sistema di linee normali, in ogni punto, alla superficie σ, e indichiamo con n la misura dell'arco di questa linea, avente per origine il punto d'incontro della linea con la superficie, e per termine il punto generico.

Potremo allora intendere la posizione di ogni punto, P, dello spazio rappresentato per mezzo delle coordinate curvilinee u, v, n. La superficie σ sarà, per tal modo, rappresentata da $n = 0$. E $\lim\limits_{n>0}$, $\lim\limits_{n<0}$ significheranno il limite di una funzione del punto P, o delle coordinate u, v, n, col tendere di P ad un punto, P_σ, della superficie σ, — determinato dalle coordinate u, v — da una parte e dall'altra del pian tangente nel punto medesimo.

Supponiamo che una funzione del punto P

$$\varphi = \varphi(u, v, n)$$

e le sue derivate parziali fino a

$$\frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu\, \partial v^\nu}$$

siano limitate e continue dall'una *o* dall'altra parte della superficie σ. Varrà, in base a (1), l'una *o* l'altra delle due formole

$$\lim_{n>0} \frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu\, \partial v^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} \lim\limits_{n>0} \varphi}{\partial u^\mu\, \partial v^\nu}, \quad \lim_{n<0} \frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu\, \partial v^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} \lim\limits_{n<0} \varphi}{\partial u^\mu\, \partial v^\nu}. \tag{2}$$

Supposto poi che la funzione e le indicate sue derivate parziali siano limitate e continue dall'una *e* dall'altra parte di σ, dove presentino, per avventura, una discontinuità di prima specie, varrà l'una *e* l'altra delle (2), e posto, per brevità di scrittura,

$$\lim_{n>0} - \lim_{n<0} = \mathrm{D},$$

si avrà

$$\mathrm{D}\frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu\, \partial v^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu}\mathrm{D}\varphi}{\partial u^\mu\, \partial v^\nu}. \tag{3}$$

Si riconosce agevolmente come le stesse formole si verifichino, sostituendo s_1 e s_2 a u e v, con che a $\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial u^\mu \, \partial v^\nu}$ si sostituisce $\frac{\partial^\mu}{\partial s_1^\mu} \frac{\partial^\nu}{\partial s_2^\nu}$.

Riferiamoci ora ad una terna d'assi cartesiani ortogonali x, y, z, e indichiamo con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, con $\alpha_i', \beta_i', \gamma_i'$ e con ϱ_i (>0), dove i siano i valori 1 e 2, i coseni di direzione della tangente, volta nel senso in cui cresce la misura s_i dell'arco, i coseni di direzione della normale principale, volta verso il centro di curvatura, e il raggio di curvatura, nel punto (x, y, z) o $(u, v, 0)$, delle linee coordinate dell'uno e dell'altro sistema.

Abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \alpha_i + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \beta_i + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \gamma_i, \tag{4}$$

e rammentando

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial s_i} = \frac{1}{\varrho_i} \alpha_i', \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial s_i} = \frac{1}{\varrho_i} \beta_i', \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial s_i} = \frac{1}{\varrho_i} \cdot \gamma_i',$$

con scrittura simbolica di manifesto significato,

$$\frac{\partial^2}{\partial s_i^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \cdot \alpha_i + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \beta_i + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \gamma_i \right]^2 + \frac{1}{\varrho_i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \alpha_i' + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \beta_i' + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \gamma_i' \right). \tag{5}$$

Supponiamo l'asse delle x tangente, nel punto considerato, alla superficie, e con questo rappresenti la tangente alla linea i, presa col senso indicato. Le formole (4) e (5) forniscono

$$\frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{\partial}{\partial x} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\varrho_i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \alpha_i' + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \beta_i' + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \gamma_i' \right). \tag{7}$$

La (7) mostra che, per la derivata prima, si può sostituire la coordinata relativa ad un asse tangenziale all'arco di linea superficiale corrispondente: mentre le (8) e (9) mostrano che simile sostituzione non si può fare in generale, per le derivate di ordine superiore. Per cui, applicando le formole in discorso alle (2) o alla (3), si nota che, supposti gli assi x e y tangenziali, si può derivare lungo la superficie ($\lim \varphi$ o $D\varphi$) per avere il limite, o il salto, di $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, ma non egualmente per avere il limite, o il salto, di $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.

La (7) assume una forma particolarmente utile, supponendo che la linea i sia linea di curvatura della superficie, relativa al considerato punto, e che l'asse delle z abbia la direzione della normale alla superficie, nel punto stesso, presa con un senso stabilito, per attribuire poi alla misura R_i del raggio di curvatura principale corrispondente il segno $+$ o il segno $-$, secondo che il relativo centro di curvatura si trova dalla parte positiva o negativa della normale medesima. Si ha, con questo, pel teorema di Meusnier,

$$\frac{\gamma_i'}{\varrho_i} = \frac{1}{R_i}$$

Per cui la (8) diventa

$$(7') \qquad \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\varrho_i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot \alpha_i' + \frac{\partial}{\partial y}\beta_i'\right) + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{1}{R_i}.$$

Applichiamo le precedenti formole al caso di

$$(10) \qquad \varphi = \int_\sigma \frac{k\, d\sigma}{r}$$

« funzione potenziale di strato semplice », dove r rappresenta la distanza del punto P dello spazio dal punto generico della superficie σ, e k è supposta una funzione regolare di questo punto: cioè una funzione limitata, continua, e dotata delle derivate, rispetto alle coordinate cartesiane del punto, fino all'ordine che occorre considerare.

Basta supporre k limitata e continua, perchè φ ne risulti funzione limitata e continua di P, in tutto lo spazio: e supporre le derivate prime di k limitate e integrabili, perchè φ ammetta derivate prime, limitate e continue dalle due parti, separatamente, di σ. Si ha quindi, nella prima ipotesi,

$$(11) \qquad D\varphi = 0,$$

e, aggiungendovi la seconda, per (3), dove si faccia $\mu = 1$, $\nu = 0$, e (7) (relativa all'asse della x tangenziale)

$$(12) \qquad D\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Nelle stesse due ipotesi, per un risultato di Beltrami [1], recentemente richiamato e utilizzato da Somigliana [2], ogni derivata prima di φ si può rappresentare come somma di tre funzioni potenziali, di linea, relativa al contorno di σ, di strato semplice e di doppio strato, relative a σ; espres-

[1] *Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. Neumann sulle funzioni potenziali.* Annali di Matematica pura e applicata (2), vol. X (1880).

[2] *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di superficie.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LI (1916).

sione che intanto fornisce, inteso che l'asse delle z abbia la direzione della normale a σ, nel punto considerato,

$$D\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -4\pi k. \tag{13}$$

Ora, ammessa l'esistenza delle derivate seconde di k, con cui si forma la densità dell'accennato strato semplice, risulta dalla stessa espressione, per le ricordate proprietà generali della funzione potenziale di strato semplice, oltre di che, per le premesse ipotesi, in conseguenza delle note proprietà della funzione potenziale di doppio strato, che φ ammetterà derivate seconde, rispetto alle singole coordinate, limitate e continue, dalle due parti, separatamente, della superficie σ.

Tanto basta perchè possiamo applicare a (11) la (3), dove si faccia $\mu = 2$, $\nu = 0$, e s'introduca s_i. Otteniamo, supposti gli assi delle x e delle y tangenti alle linee di curvatura, nel punto considerato, per (7'), tenendo conto di (12) e di (13),

$$D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi k}{R_1}, \quad D\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{4\pi k}{R_2}. \tag{14}$$

Dalle quali due relazioni, poichè, verificandosi dalle due parti di σ

$$\Delta_2\varphi = 0,$$

si avrà

$$D\Delta_2\varphi = 0,$$

si ricava

$$D\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 4\pi k\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{15}$$

Inoltre, applicando la (3), con $\mu = 1$, $\nu = 0$ (introdottovi s_i), alla (13), e valendosi della (6), si ottiene

$$D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} = -4\pi\frac{\partial k}{\partial x}. \tag{16}$$

Per $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}$ giova riprendere le coordinate u, v. Si ha, con espressione simbolica, simile a quella adoperata in (5),

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} = &\left[\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right]\times\\ &\times\left[\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right]\\ &+\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}.\end{aligned} \tag{17}$$

E supposto che i tre sistemi di linee coordinate siano tra loro ortogonali, e che gli assi delle x e delle y rappresentino le tangenti alla linea 1 e alla linea 2, nel punto considerato,

$$(17)' \qquad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} = \sqrt{\mathrm{EG}}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}.$$

Nell'ipotesi che, inoltre, le linee coordinate siano formate colle linee di curvatura, risulta [1]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Per cui, applicando a (11) la (3), dove si faccia $\mu = 1$, $\nu = 1$, nelle stesse ipotesi, e tenendo conto di (12), otteniamo

$$\mathrm{D}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Tutte relazioni, codeste, che si trovano negli scritti testè ricordati.

In modo simile si possono agevolmente dedurre le relazioni analoghe, relative alla funzione potenziale di doppio strato

$$\varphi = \int_\sigma k\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma,$$

valendosi semplicemente della relazione

$$\mathrm{D}\varphi = 4\pi k.$$

[1] Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, Spoerri, 1902), Cap. IX, formole (I) (§ 55) e (14) (§ 62).