ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Balistica. — *Osservazioni sul calcolo della traiettoria di un proietto.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI.

In una precedente Nota testè pubblicata in questi Rendiconti, mi sono occupato del problema della correzione del tiro, per il quale ho determinato un'equazione differenziale che lega direttamente ai dati iniziali di tiro la gittata e l'angolo di arrivo su un piano orizzontale o verticale qualsiasi. Qui mi occuperò, invece, del problema di calcolare la traiettoria di un dato proietto. Nel § 1 dò alcune generalizzazioni del metodo Siacci, che credo utili per lo studio del tiro con forte dislivello tra origine e bersaglio; negli altri paragrafi mi occupo invece del cosiddetto calcolo di una traiettoria per punti, cioè del calcolo di una traiettoria eseguito mediante decomposizione in archi parziali. Il § 2 vuole perfezionare il calcolo numerico della densità media dell'aria relativa a un arco di traiettoria; il § 3 contiene una osservazione affatto elementare, che mi si presentò studiando le traiettorie del nostro mortaio da 210: che cioè in molti casi, specialmente per velocità moderate, il semplice sviluppo di Taylor dà un'approssimazione non inferiore a quella ottenuta con altri metodi più faticosi e meno rapidi.

§ 1. *Generalizzazione del metodo Siacci.* — Per una tale generalizzazione credo si debba evitare l'uso di funzioni in due variabili (di tavole a doppia entrata), che porterebbero probabilmente a tavole a tripla entrata per i fattori di tiro. Perchè, se così si volesse procedere, meglio varrebbe abbandonare il metodo Siacci, spezzare la traiettoria in archi, in ciascuno dei quali il problema si possa ridurre a quadrature, costruendo tavole numeriche (proprio a doppia entrata) per questi integrali, e raggiungendo così la massima esattezza teorica. Io credo preferibile rendere, per così dire, più elastico il metodo Siacci, ricordando che una formola teorica tanto più completamente può rappresentare un fenomeno fisico, quanto maggiore è il numero delle costanti arbitrarie, che essa contiene.

Nelle formole Siacci compare un *solo* parametro β: ciò che basta per il tiro contro un bersaglio posto sull'orizzonte dell'arma, perchè in tale studio vi è un'incognita sola: la *gittata*. E in fondo il β si determina appunto in modo da mettere d'accordo risultati teorici e sperimentali. Il β non basta più, secondo me, per bersagli a forti dislivelli dall'arma, che dipendono da *due* coordinate, o per altri problemi più complicati. Nella mia Nota citata ho provato che il metodo Siacci si può, con opportuno cambiamento di funzione incognita, considerare come la sostituzione del solo primo termine allo sviluppo in serie, che si ottiene dal classico metodo delle successive approssimazioni. Risultati migliori sono pertanto da attendersi dal calcolo del secondo termine di tale sviluppo; ma le difficoltà di apprezzare la migliore approssimazione raggiunta, mi hanno indotto a procedere per altra via, che pure permette di realizzare una ulteriore approssimazione. A tal fine sarà bene esporre il metodo Siacci nella forma seguente. Per trovare alcune delle curve che soddisfano a un'equazione $dy = f(x, y)\, dx$, si scriva tale equazione nella forma

$$\frac{dy}{Y(y)} = \frac{X(x)}{Y(y)} f(x, y) \frac{dx}{X(x)}, \quad \text{ossia} \quad \int \frac{dy}{Y(y)} = \beta \int \frac{dx}{X(x)},$$

dove $X(x)$ ed $Y(y)$ sono funzioni arbitrarie della sola x, o della sola y, e β è un conveniente valore intermedio di $\frac{X(x)}{Y(y)} f(x, y)$ lungo le curve cercate; il quale β si determinerà per via teorica, o sperimentale. Il risultato sarà *tanto migliore*, quanto *più ristretti* sono i limiti tra cui varia β. Così concepito, il metodo Siacci si presta alle più svariate generalizzazioni, ottenute, o cambiando le variabili x, y, oppure le funzioni X, Y.

Conserveremo le notazioni abituali (¹), ponendo poi $w = v \cos\theta =$ velocità orizzontale; e introdurremo una nuova variabile ω (il cui valore iniziale sarà indicato con Ω), scrivendo $w = \psi(\omega)$. Per ogni scelta della funzione arbitraria $\psi(\omega)$ otterremo particolari formole di tiro: noi adotteremo $\psi(\omega) = a + b\omega$ con a, b costanti (da scegliersi in modo opportuno, come vedremo). Ma potremmo per es. assumere ψ uguale anche ad un polinomio di grado più elevato. L'equazione $Cg\, dw = i\delta_y v\, F(v)\, d\theta$ dell'odografa dà, integrata

$$\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi = -\frac{Cb}{2\delta_0 i\beta}[I(\omega) - I(\Omega)]$$

dove β è un valore intermedio di

$$\beta' = \frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{v\, F(v)}{\omega F(\omega)} \cos^2\theta .$$

E, continuando col metodo Siacci, si trova poi (²):

$$x = \frac{C}{\delta_0 i\beta} \{ \Delta(\Omega) - \Delta(\Omega) \} \quad \text{ove} \quad \Delta(\omega) = \frac{a^2 b}{2g} I(\omega) + 2ab^2\, T(\omega) + b^3\, D(\omega) .$$

(¹) Con A, D, I, T indico le funzioni Siacci, con $F(v)$ la funzione resistente Siacci, con C il coefficiente balistico, con i il coefficiente di forma, con θ l'inclinazione, con φ l'angolo di proiezione. Gli assi x, y hanno la posizione consueta. Altre formole, *meno analoghe* a quelle del Siacci, noi potremmo ottenere *sostituendo alla w un'altra variabile indipendente*, funzione di v e di θ.

(²) Se si ponesse $\psi(\omega) = a + b\omega + c\omega^2 + e\omega^3$ con a, b, c, e costanti, si troverebbe

$$\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi = -\frac{C}{2\delta_0 i\beta} \Big\{ b[I(\omega) - I(\Omega)] + 4gc[T(\omega) - T(\Omega)] + 6ge[D(\omega) - D(\Omega)] \Big\} .$$

E, supposto soltanto $\psi(\omega) = a + b\omega + c\omega^2$, si troverebbe per la x una formola affatto

Posto $B = \int I d T$, se ne deduce ancora:

$$\frac{y}{x} - \operatorname{tg} \varphi = - \frac{Cb}{2\delta_0 \, i\beta} \left\{ \frac{\mathfrak{A}(\omega) - \mathfrak{A}(\Omega)}{\Delta(\omega) - \Delta(\Omega)} - I(\Omega) \right\},$$

ove

$$\mathfrak{A}(\omega) = \frac{a^2 b}{2g} \tfrac{1}{2} I^2(\omega) + 2a\, b^2\, B(\omega) + b^3\, A(\omega)\,.$$

Tranne la $B(\omega)$, funzione di andamento semplicissimo, tutte le altre funzioni coincidono con quelle calcolate dal Siacci; e le precedenti formole si prestano benissimo ai calcoli numerici. Per questi basterà determinare a e b in modo che per due punti scelti a piacere della traiettoria (calcolata in modo approssimato con un metodo qualsiasi, per es. anche col metodo originale del Siacci) la β' diventi uguale ad 1, oppure in modo che per tre punti (per es. punto di partenza, di arrivo e vertice) la β' assuma uno stesso valore, oppure in altri modi, che permettano di apprezzarne facilmente un valor medio. E anzi tale procedimento, ripetuto due volte, condurrà a risultati ancora più approssimati: *Si è così trasformato nel modo più semplice, anche per il calcolo numerico, il metodo Siacci in un metodo di successive approssimazioni.* Naturalmente il metodo si può anche applicare ad un solo pezzo di traiettoria, e dà nuovi e approssimati metodi di calcolo di una traiettoria per punti.

Ma io credo utile considerare le precedenti formole anche da un altro punto di vista. Assumiamo pure l'ipotesi consueta (che mi sembra però parecchio arbitraria) di considerare β come costante lungo una stessa verticale, e perciò funzione soltanto dell'angolo di proiezione φ e dell'ascissa del bersaglio. Noi abbiamo a nostra disposizione due parametri a, b per compensare l'errore, dando ad a, b valori opportuni: per es. ponendo $b = \cos \varepsilon$, ove ε è l'angolo di sito definito dalla $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{y}{x}$. Il parametro a varierà allora verisimilmente con grande lentezza lungo una ordinata; e si tratterà soltanto di fare uno studio sperimentale o teorico (con sviluppo in serie) del come varia a al variare dell'ordinata, così come il Siacci ha fatto per il parametro β.

Oppure anche si può porre $a = 0$: le formole diventano assai simili a quelle del Siacci. E ci si può accontentare poi di studiare come varia

---

analoga alla precedente, ove però $\Delta(\omega)$ sarebbe definito dalla

$$\Delta(\omega) = \frac{a^2 b}{2g} I(\omega) + 2a(b^2 + ac)\, T(\omega) + (b^3 + 6abc)\, D(\omega) + 4c(b^2 + ac)\, D_2(\omega) + \\ + 5\, bc^2\, D_3(\omega) + 2c^3\, D_4(\omega)\,,$$

ove è scritto $D_n(\omega) = \int - \frac{u^n\, du}{F(u)}$.

$b \sec \varepsilon$ lungo una verticale; ciò che pure porterà verisimilmente a funzioni di lenta variabilità [1]. Si otterrebbero così formole, che anche per tiri con forti dislivelli dànno l'approssimazione del solito metodo per tiri all'orizzonte con l'aggiunta di una sola tavola che ci dica come varia il parametro $b \sec \varepsilon$. Conto di ritornare su questo studio numerico.

§ 2. *Densità media dell'aria per un arco di traiettoria.* — Negli studî per calcolare una traiettoria per punti, si presenta sempre il problema di determinare il valor medio della densità dell'aria per l'arco di traiettoria considerato; e si espongono sovente dei metodi, in apparenza di gran precisione (tanto da distinguere il β principale dai secondarî), che, a mio credere, dànno un'approssimazione molto inferiore alla sperata (come mi sono accorto facendo effettive applicazioni numeriche). La ragione sta in ciò: che nello studio del valor medio di δ_y ha importanza non trascurabile l'integrale, per il calcolo del quale si cerca tale valor medio. Trascurare tale integrale, e sostituirlo con un altro (generalmente lo $\int \delta_y \, dx$) rende illusoria ogni approssimazione maggiore di quella ottenuta prendendo un valor medio suggerito senz'altro dall'intuizione, senza calcoli speciali. Ora l'integrale, che più frequentemente si presenta in balistica sia a chi applichi i metodi Siacci, sia a chi consideri con Eulero archi ove $F(v)$ è proporzionale a v^n, è l'integrale $L = \int_\varphi^\theta \frac{1}{\delta_0} \delta_y \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$; e, a seconda dei casi, lo si vuole scrivere nella forma $\delta_m \frac{1}{\delta_0} \int_\varphi^\theta \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$, oppure $\frac{\gamma}{\delta_0} \delta_m \int_\varphi^\theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$; ove δ_m è un valor medio di δ_y, e γ un valor medio di $\frac{1}{\cos^{n-2} \theta}$. Per determinare δ_m, oppure il prodotto $\gamma \delta_m$, basterà evidentemente calcolare il valore di L. Sarà nei due casi $\delta_m = \frac{L \delta_0}{\xi_{n-1}(\theta) - \xi_{n-1}(\varphi)}$, oppure $\gamma \delta_m = \frac{L \delta_0}{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \varphi}$. $\left(\text{Con } \xi_m \text{ indico al solito lo } \int \frac{d\theta}{\cos^{m+1} \theta}\right)$. Ora si noti che, indicando con h una costante, la quale, nelle condizioni usuali, vale 0,00008, si ha $\frac{\delta_y}{\delta_0} = 1 - hy$. Si tratta pertanto di calcolare

$$L = \int_\varphi^\theta (1 - hy) \frac{d\theta}{\cos^n \theta}.$$

[1] Il caso di $a = 0$, $b = 1$ è già stato usato dall'Olsson; il caso $a = 0$, $b = \sqrt{\cos \varphi \cos \varepsilon}$ dall'ing. colonnello Bianchi in un suo pregevole lavoro (Rivista di artiglieria e genio, vol. I, 1914). L'ing. Bianchi lo applica al calcolo di un arco di traiettoria. Non conoscevo queste ricerche, quando sono giunto alle formole precedenti. La maggiore generalità di queste e il modo affatto nuovo di concepirle che sopra ho esposto per le applicazioni numeriche, mi hanno indotto ciononostante a pubblicare questo studio.

Ora l'idea più semplice e *più esatta* è quella di sostituire *in questo integrale* alla y un suo valore approssimato (anche soltanto in modo grossolano, perchè h è molto piccolo). E i calcoli numerici risultano tanto semplici quanto i consueti, che ricorrono invece al calcolo di $\int y dx$. Come ora proveremo, si possono in modi molteplici trovare tre costanti a, b, c, così da poter scrivere con sufficiente approssimazione $y = a + b \operatorname{tg} \theta + c \operatorname{tg}^2 \theta$. Si avrà allora:

$$L = (1 + hc - ha)\left[\xi_{n-1}(\theta) - \xi_{n-1}(\varphi)\right] - ch\left[\xi_{n+1}(\theta) - \xi_{n+1}(\varphi)\right] - \\ - \frac{hb}{n}\left[\sec^n \theta - \sec^n \varphi\right],$$

che risolve il nostro problema per mezzo delle solite funzioni $\xi(\theta)$, per cui i balistici hanno, come è noto, costruito tavole numeriche. Tutto è ridotto pertanto a calcolare le costanti a, b, c. Ciò che si può fare nei modi più svariati: o calcolare in modo analogo a quello che esponiamo nel § 3 lo sviluppo della y secondo le potenze di $\operatorname{tang} \theta$, oppure sostituire alla traiettoria una curva media tra due parabole P_1, P_2 che comprendano la traiettoria stessa. A parabole P_i possiamo per es. assumere quelle [1] che nel vuoto sarebbero descritte da un proietto, che *partisse*, o che *arrivasse* con la stessa inclinazione e con la stessa velocità del nostro proietto.

§ 3. *Sviluppo di Taylor.* — Nello studiare le traiettorie per il nostro mortaio da 210, ho notato che il semplice sviluppo di Taylor delle x, y secondo le potenze di $\operatorname{tang} \theta$, o di θ permette, senza speciali tavole numeriche, di calcolare un arco di traiettoria con metodi rapidi e nón meno approssimati dei consueti. Io qui, *a titolo di esempio*, mi occuperò dello sviluppo della x secondo le potenze di θ. Supponiamo di studiare un arco di traiettoria, ove $F(v)$ sia proporzionale a v^n; cosicchè $F'(v) = \dfrac{nF(v)}{v}$. Da questa, e dalle equazioni fondamentali della balistica si deduce derivando e ponendo $H = \dfrac{i\,\delta_y}{Cg}$:

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{v^2}{g} \quad ; \quad \frac{d^2x}{d\theta^2} = -2\frac{v^2}{g}\left[\operatorname{tang}\theta + HF(v)\sec\theta\right]$$

$$\frac{d^3x}{d\theta^3} = -2\frac{v^2}{g}\left\{(1 + 3\operatorname{tg}^2\theta) + (n+5)\operatorname{tg}\theta\left[HF(v)\sec\theta\right] + \right. \\ \left. + (n+2)\left[HF(v)\sec\theta\right]^2\right\}.$$

Trascurando i termini dello sviluppo, che contengono derivate di ordine superiore, la formola di Lagrange del resto dimostra che l'errore commesso per un arco, ove θ varia di α gradi, è minore di $\dfrac{T}{24}\alpha^4\left(\dfrac{\pi}{180}\right)^4$

(1) Altre parabole di questo tipo sono date dal prof. Picone in una sua notevole Memoria in corso di stampa nella Rivisia di artiglieria e genio; altre traiettorie approssimate del tipo voluto sono date nella Nota citata dell'ing. Bianchi.

ove T è il massimo di $\left| \frac{d^4 x}{d\theta^4} \right|$ nell'arco considerato, cioè è il massimo di

$$2 \frac{v^2}{g} \{ 4 \operatorname{tag} \theta (2 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta) + [\mathrm{HF} \sec \theta] [(n+7) + (n^2 + 9n + 26) \operatorname{tg}^2 \theta] + $$
$$+ 3 [\mathrm{HF} \sec \theta]^2 (n+2)(n+3) \operatorname{tg} \theta + 2(n+1)(n+2) [\mathrm{HF} \sec \theta]^3 \} .$$

Il calcolo numerico dimostra che questo metodo, applicato al mortaio succitato, rivaleggia in precisione con i soliti tanto più complicati.

Geodesia. — *Azimut assoluto dell' Osservatorio Vesuviano sull'orizzonte dell'Osservatorio astronomico di Capodimonte in Napoli.* Nota di G. Cicconetti, presentata dal Socio P. Pizzetti.

Negli anni 1911 e 1912 sono state fatte sul R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte in Napoli due determinazioni di azimut assoluto relative al R. Osservatorio Vesuviano.

Nel 1911 le osservazioni vennero effettuate con l' Universale Bamberg del Gabinetto di Geodesia della R. Università (circoli di 27 cm. di diametro, cannocchiale centrale spezzato, valore angolare della parte di livella azimutale 3",67) e nel 1912 con un Teodolite Starke di 1ª grandezza (circolo di 26 cm. di diametro, cannocchiale centrale retto, valore angolare della parte di livella azimutale 4",75) appartenente al Gabinetto di Topografia del R. Istituto tecnico di Napoli.

Lo scopo di queste determinazioni era duplice: in primo luogo la ricerca dell'azimut dell'Osservatorio Vesuviano ed in secondo luogo vedere qual grado di precisione fosse conseguibile nella misura di un azimut astronomico con un teodolite geodetico facilmente montabile e smontabile e non specialmente adatto per osservazioni stellari come quello adoperato nella seconda misura.

La stazione a Capodimonte fu stabilita sul pilastrino scoperto della terrazza che sormonta la parte centrale dell'edificio, vicino alla cupola centrale dell'equatoriale; la mira notturna. costituita di una lampada a petrolio al fuoco di una lente, venne centrata sul pilastrino della penultima terrazza dell'Osservatorio Vesuviano, presso l'angolo nord-est, sul quale si era già compiuta nel 1910 una determinazione astronomica di latitudine (1).

Le osservazioni di azimut coll' Universale Bamberg ebbe luogo nei giorni 30 giugno, 1, 2, 3 luglio 1911 e durante questo periodo lo strumento rimase fisso sul pilastrino, protetto di giorno da una copertura mobile che veniva tolta alla sera.

I puntamenti della Polare venivano riferiti ad occhio ed orecchio ad un cronometro trasportabile Hausmann del Gabinetto di Geodesia, e profit-

(1) La latitudine astronomica del R. Osservatorio Vesuviano determinata nel 1910. R. Commissione geodetica italiana. 1915.