ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Fisica matematica. — *Sulla capacità elettrostatica di un sottile anello conduttore.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Chiedo il permesso di intrattenere l'Accademia sopra un argomento che in questi Rendiconti esposi alcune settimane or sono [1], per apportare ai risultati alcune modificazioni e complementi, atti a precisare e a esaurire la questione.

Si abbia un anello la cui configurazione geometrica si immagini definita da una sezione trasversale piana τ che si muove deformandosi (con continuità e mantenendosi piana) in modo da mantenersi normale alla linea chiusa l descritta da un suo punto generico (ad es. il baricentro); la linea l definisce l'andamento longitudinale dell'anello.

Sarà da ritenersi *sottile* l'anello se le dimensioni di τ sono dovunque piccole di fronte alle dimensioni longitudinali (con che si intende non solo di fronte alla lunghezza di l, ma anche rispetto al raggio di curvatura in ogni suo punto).

Sia l'anello isolato e caricato di elettricità in equilibrio.

Le formole stabilite nella Nota precedente, definiscono la distribuzione della carica sulla superficie del conduttore e la risultante delle forze elettriche relative ad una generica sezione trasversale dell'anello. Esse sussistono in quanto le sezioni trasversali sono, o si possono ritenere, sensibilmente uguali. Vanno modificate nell'ipotesi, più generale, che la legge di variazione delle sezioni trasversali sia qualunque, purchè tale naturalmente da conservare all'anello la caratteristica di essere sottile.

La legge di distribuzione delle masse elettriche si può compendiare allora in una relazione notevolmente semplice che ora preciserò.

Si fissi sopra la *direttrice* l dell'anello, un'origine degli archi e un senso positivo, per cui ad un generico punto O di l corrisponde un arco

$$0 \leqq s \leqq l ,$$

denotando con l la lunghezza della direttrice designata finora colla stessa lettera. Sia τ la sezione trasversale piana dell'anello che contiene il punto O, τ' l'analoga sezione nel punto O' di l, cui corrisponde il valore $s + ds$ dell'arco: τ e τ' limitano una fetta del conduttore, di spessore ds. Se si in-

[1] *Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un sottile anello conduttore.* [Vol. XXIV (1917), pp. 36 39].

dica con $\nu\, ds$ la quantità di elettricità contenuta sulla porzione di superficie σ dell'anello appartenente alla fetta anzidetta, rappresenterà ν la densità di distribuzione delle cariche, corrispondente alla sezione τ del conduttore; essa risulta definita dalla seguente formola

$$\text{(I)} \qquad 2\,\nu\, k = \mathrm{U}\,,$$

essendo U il potenziale elettrostatico (costante) del conduttore ed essendo

$$k = \frac{1}{\tau^2}\int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \log\frac{l}{\mathrm{PP}}\,,$$

in cui P e P_0 sono due generici punti di τ, $d\tau$ e $d\tau_0$ gli elementi di τ ad essi attigui. La quantità k è un puro numero, che dipende soltanto dalla sezione τ, per cui è, in generale, variabile con questa, cioè è funzione di s.

La formola (I) lascia sussistere, anche in generale, ciò che avevo rilevato nella Nota precedente, e cioè che *la densità ν è indipendente dai caratteri geometrici della direttrice l*.

Per la (I) stessa, la quantità di elettricità in equilibrio su tutto l'anello è definita dalla seguente formola

$$\text{(II)} \qquad e = \int_l \nu\, ds = \frac{\mathrm{U}}{2}\int_l \frac{ds}{k}\,;$$

per cui la capacità del conduttore risulta essere

$$\text{(III)} \qquad c = \frac{e}{\mathrm{U}} = \frac{1}{2}\int_l \frac{ds}{k}\,;$$

mentre la eliminazione del potenziale U tra la (II) e la (I), conduce ad assegnare a ν l'espressione seguente

$$\text{(I')} \qquad \nu = \frac{e}{k\displaystyle\int_l \frac{ds}{k}}\,,$$

che va sostituita alla (I) della Nota precedente, nella quale vi è $\sqrt{k}$ al posto di k.

Se, in particolare, le sezioni trasversali τ del conduttore sono tutte eguali tra di loro, k è costante e la (I') e la (III) diventano rispettivamente

$$\nu = \frac{e}{l}\quad,\quad c = \frac{l}{2k}\,.$$

Dall'ultima di queste scende che la capacità elettrostatica del conduttore è proporzionale alla sua lunghezza.

Merita speciale menzione il caso in cui l'anello è a sezione circolare. Detto a il raggio, è allora (¹)

$$k = \frac{1}{4} + \log \frac{l}{a},$$

per cui la capacità assume il valore seguente:

$$c = \frac{2l}{1 + 4 \log \frac{l}{a}}.$$

È quasi superfluo richiamare la circostanza che questi risultati hanno carattere approssimato, tanto maggiore quanto più sottile è l'anello.

1. La giustificazione della formola (I) è immediata. Basta ricorrere all'espressione approssimata, assegnata dal Levi-Civita, alla funzione potenziale newtoniana di un tubo sottile nei punti appartenenti al tubo stesso. Essa, riportata al caso nostro, è la seguente (²):

$$\mathrm{U(P)} = \frac{2\nu}{\tau} \int_\tau \log \frac{l}{\overline{\mathrm{PP}_0}}\, d\tau_0 .$$

Il valore medio del potenziale U nei punti della sezione τ è in conseguenza

$$\frac{1}{\tau} \int_\tau \mathrm{U(P)}\, d\tau = 2\, \frac{\nu}{\tau^2} \int_\tau d\tau \int_{\tau_0} \log \frac{l}{\overline{\mathrm{PP}_0}}\, d\tau_0 = 2\nu k .$$

Dopo ciò, basta manifestamente rilevare che nella interpretazione elettrostatica della precedente formola, il primo membro altro non è se non il valore del potenziale del conduttore. Con ciò la (1) rimane dimostrata.

2. Sieno $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ i due vettori unitarî diretti secondo la tangente e la normale principale nel generico punto O della direttrice l dell'anello. La risultante Φ delle forze elettriche della sezione trasversale τ, contenente il punto O, è definita dalla formola seguente (³):

$$\Phi = \frac{d(\nu^2 k)}{ds}\, \mathbf{t} + \frac{\nu^2 k}{r}\, \mathbf{n},$$

dove $\frac{1}{r}$ è la curvatura della direttrice l nel punto O.

(¹) Cfr. Levi-Civita, *Sulla gravitazione di un tubo sottile con applicazione all'anello di Saturno* [Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, vol. XXXIII (1912), pag. 362, formola (11)].

(²) Cfr. Levi-Civita, loc. cit., formola (3).

(³) Cfr. L vi-Civita, loc. cit., § 6.

Avuto riguardo alla (I') la precedente diviene

$$\Phi = \frac{e^2}{\left(\int_l \frac{ds}{k}\right)^2} \frac{d\frac{1}{k}}{ds} \mathbf{t} + \frac{e^2}{kr\left(\int_l \frac{ds}{k}\right)^2} \mathbf{n}.$$

Appare da questa che se è

$$\frac{d\frac{1}{k}}{ds} = 0,$$

cioè le sezioni trasversali del tubo sono (o si possono ritenere sensibilmente) costanti, è

$$\Phi = \frac{e^2 k}{r l^2} \mathbf{n},$$

come nella Nota precedente ([1]).

Matematica. — *Sur certains cycles à deux dimensions des surfaces algébriques.* **Nota di S. Lefschetz, presentata dal Corrispondente Castelnuovo.**

1. L'objet de cette Note est de démontrer le théorème suivant: *A toute paire de courbes algébriques, algébriquement distinctes, d'une surface algébrique irréductible à singularités ordinaires, correspond un cycle à deux dimensions bien défini.*

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface, m son ordre, $\{H_x\}$, $\{H_y\}$ les faisceaux découpés par les plans $x = \mathrm{Cte}$, $y = \mathrm{Cte}$, C_1, C_2, deux courbes algébriques de la surface, ne passant pas par les points bases de $\{H_y\}$, hypothèse qui ne diminue en rien la généralité. Soient encore $M_1^1, M_2^1, .., M_{m_1}^1$, les points du groupe $C_1 H_y$, $M_1^2, M_2^2, \dots M_{m_2}^2$, ceux du groupe $C_2 H_y$. Traçons une ligne quelconque de M_h^1 à M_k^2 dans H_y, et faisons décrire à la variable complexe y un cercle de grand rayon γ. Soient ζ_h^1, ζ_k^2, les lieux de M_h^1 e M_k^2, Φ_{hk} la surface engendrée par la

([1]) Le formole di questa furono dedotte sfruttando la circostanza che le forze elettriche, nei punti della superficie del conduttore, devono esser dirette normalmente agli elementi superficiali cui si riferiscono. Questa circostanza mi indusse a stabilire la relazione $\Phi \times \mathbf{t} = 0$, ciò che è legittimo solo nella ipotesi che il conduttore abbia sezione trasversale costante. Basta pensare ad es. ad un anello a sezione circolare variabile. E però interessante la coincidenza dei risultati ottenuti coi due metodi distinti, quando la sezione è costante, nel qual caso anche il primo metodo è perfettamente legittimo.