ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Avuto riguardo alla (I') la precedente diviene

$$\Phi = \frac{e^2}{\left(\int_l \frac{ds}{k}\right)^2} \frac{d\frac{1}{k}}{ds} \mathbf{t} + \frac{e^2}{kr\left(\int_l \frac{ds}{k}\right)^2} \mathbf{n}.$$

Appare da questa che se è

$$\frac{d\frac{1}{k}}{ds} = 0,$$

cioè le sezioni trasversali del tubo sono (o si possono ritenere sensibilmente) costanti, è

$$\Phi = \frac{e^2 k}{r l^2} \mathbf{n},$$

come nella Nota precedente [1].

Matematica. — *Sur certains cycles à deux dimensions des surfaces algébriques.* Nota di S. LEFSCHETZ, presentata dal Corrispondente CASTELNUOVO.

1. L'objet de cette Note est de démontrer le théorème suivant: *A toute paire de courbes algébriques, algébriquement distinctes, d'une surface algébrique irréductible à singularités ordinaires, correspond un cycle à deux dimensions bien défini.*

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface, m son ordre, $\{H_x\}$, $\{H_y\}$ les faisceaux découpés par les plans $x = \text{Cte}$, $y = \text{Cte}$, C_1, C_2, deux courbes algébriques de la surface, ne passant pas par les points bases de $\{H_y\}$, hypothèse qui ne diminue en rien la généralité. Soient encore $M_1^1, M_2^1, \ldots, M_{m_1}^1$, les points du groupe $C_1 H_y$, $M_1^2, M_2^2, \ldots M_{m_2}^2$, ceux du groupe $C_2 H_y$. Traçons une ligne quelconque de M_h^1 à M_k^2 dans H_y, et faisons décrire à la variable complexe y un cercle de grand rayon γ. Soient ζ_h^1, ζ_k^2, les lieux de M_h^1 e M_k^2, Φ_{hk} la surface engendrée par la

(1) Le formole di questa furono dedotte sfruttando la circostanza che le forze elettriche, nei punti della superficie del conduttore, devono esser dirette normalmente agli elementi superficiali cui si riferiscono. Questa circostanza mi indusse a stabilire la relazione $\Phi \times \mathbf{t} = 0$, ciò che è legittimo solo nella ipotesi che il conduttore abbia sezione trasversale costante. Basta pensare ad es. ad un anello a sezione circolare variabile. E però interessante la coincidenza dei risultati ottenuti coi due metodi distinti, quando la sezione è costante, nel qual caso anche il primo metodo è perfettamente legittimo.

ligne $M^1 M^2_k$. Les lignes ζ^1_h, ζ^2_k sont fermées si les axes sont arbitraires, car alors le plan de l'infini n'est tangent ni à C_1, ni à C_2, et quand y décrit γ, M^1_h et M^2_k sont ramenés à leur position primitive. ζ^1_h et ζ^2_k forment la frontière complète de Φ_{hk}. Si l'on remplace le chemin $M^1_h M^2_k$ par un autre, les deux ne différeront que d'un cycle linéaire σ de H_y. Le lieu de σ quand y décrit γ, est une surface fermée correspondant à un résidu à l'infini pour les intégrales doubles, ou comme nous le dirons, c'est un *cycle résiduel*. Un tel cycle est à considérer comme nul, car il peut être réduit par déformation, à une ligne ordinaire de la surface (dans ce cas la position de σ pour $y = \infty$).

2. L'ensemble des lignes ζ^1_h forme frontière complète pour une certaine aire fermée Ψ_1 de C_1, puisqu'elles entourent les points à l'infini. De même on aura une aire fermée Ψ_2 de C_2, dont les lignes ζ^2_k forment la frontière complète. Avec les notations de Poincaré dans ses études d'Analyse Situs, on a les congruences

$$\Phi_{hk} \equiv \zeta^2_k - \zeta^1_h \quad , \quad \Psi_1 \equiv \Sigma \zeta^1_h \quad , \quad \Psi_2 \equiv \Sigma \zeta^2_h .$$

Par suite

$$\Gamma = m_1 \Psi_2 - m_2 \Psi_1 + \Sigma \Phi_{hk} \equiv 0 ,$$

c'est à dire que Γ est un cycle à deux dimensions de notre surface algébrique. D'après une remarque faite plus haut, quand on change la forme des lignes $M^1_h M^2_k$ on ne fait qu'ajouter à Γ des cycles résiduels, c'est à dire des cycles nuls. Γ est donc bien défini. *C'est le cycle que nous avions en vue.* Il faut montrer que l'on n'a pas $\Gamma \sim 0$.

3. Pour atteindre notre objet, il suffit de montrer qu'il existe une intégrale double de deuxième espèce, sous la forme dite *normale*

$$(1) \qquad \iint \frac{P(x, y, z)}{F'_z}\, dx\, dy , \qquad \text{(P polynome adjoint)},$$

à periode non nulle par rapport à Γ. En effet, d'après les travaux classiques de Mr. Picard, le nombre de telles intégrales à périodes non nulles, est précisément celui des cycles à deux dimensions.

Tout d'abord je dis que

$$(2) \qquad \iint_{\Psi_1} \frac{P(x, y, z)}{F'_z}\, dx\, dy = 0 \quad , \quad \iint_{\Psi_2} \frac{P(x, y, z)}{F'_z}\, dx\, dy = 0 .$$

Transformons birationnellement la surface F, en une autre F_1, d'équation $F_1(x_1, y_1, z_1) = 0$, au moyen d'un système lineaire $|D|$, découpé par des surfaces adjointes $\sum_1^4{}_i \lambda_i \varphi_i(x, y, z) = 0$, la transformation étant définie par

$$x_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_4} \quad , \quad y_1 = \frac{\varphi_2}{\varphi_4} \quad , \quad z_1 = \frac{\varphi_3}{\varphi_4} .$$

Supposons le système $|D|$ choisi de telle manière que, D_i étant la courbe déterminée par $\varphi_i = 0$, C_1 fasse partie de D_2. Le jacobien $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, y_1)}$ ne s'annulle identiquement que sur D_1. De plus, comme les axes sont arbitraires, C_1 ne fait pas partie de la courbe simple de F, pour laquelle $F'_z = 0$. Le jacobien ci-dessus ne s'annulera donc qu'en un nombre fini de points de Ψ_1. Entourons chacun d'eux d'un petit circuit sur C_1, et soit Ψ'_1 la somme des aires que ces circuits renferment. Posons enfin $\Psi''_1 = \Psi_1 - \Psi'_1$. La quantité

$$\left| \iint_{\Psi'_1} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} \, dx \, dy \right| ,$$

est évidemment très petite. D'ailleurs si $\overline{\Psi}''_1$ est la transformée de Ψ''_1 sur F_1, comme $y_1 = 0$ en tous les points de $\overline{\Psi}''_1$, on a

$$\iint_{\Psi''_1} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} \, dx \, dy = \iint_{\overline{\Psi}''_1} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, y_1)} \, dx \, dy = 0 ,$$

ce qui suffit pour démontrer la première équation (2), et par suite aussi la deuxième.

4. D'après ce qui précède la période par rapport à Γ, est donc égale à la valeur de l'intégrale étendue aux surfaces Φ_{hk}. C'est par suite le résidu à l'infini de la fonction

$$w(y) = \sum_{h,k} \int_{M_h^1}^{M_k^2} \frac{P(x, y, z) \, dx}{F'_z} ,$$

qui y est d'ailleurs régulière. Les fonctions de ce genre, correspondant à l'intégrale abélienne

$$\int \frac{P(x, y, z) \, dx}{F'_z} , \tag{3}$$

relative à H_y, ont déjà été étudiées par Poincaré (Annales de l'Ecole Normale, 1909; Archiv für Math. 1911). Quoiqu'il se soit limité surtout au cas où (3) est de première espèce, certaines de ses conclusions s'appliquent encore ici. En particulier nous avons

$$w(y) = \sum_j \frac{\mu_j}{2\pi i} \int_b^{b_j} \frac{\Omega_j(Y) \, dY}{Y - y} + E(y) , \tag{4}$$

où: 1°) les plans $y = b_j$, sont les plans du faisceau $y = $ Cte, tangents à F. 2°) $\Omega_j(y)$ est une période de (3) correspondant au cycle linéaire de H_y qui devient très petit pour $y = b_i$. 3°) $E(y)$ est un polynome de degré

$\nu - m + 2$, ν étant le degré de P. 4°) Les μ sont des entiers indépendants de l'intégrale particulière (3) choisie.

Supposons que (3) se réduise à une intégrale de première espèce. On aura, si A est un point base de $\{H_y\}$,

$$\sum\nolimits_{h,k} \int_{M_h^1}^{M_k^2} du = m_1 \sum\nolimits_k \int_{A}^{M_k^2} du - m_2 \sum\nolimits_h \int_A^{M_h^1} du. \tag{5}$$

D'ailleurs (Poincaré)

$$\sum\nolimits_h \int_A^{M_h^1} du = \sum \frac{\lambda_j^1}{2\pi i} \int_b^{b_j} \frac{\Omega_j'(Y)\, dY}{Y - y} + e_1(y),$$

$$\sum\nolimits_k \int_A^{M_k^2} du = \sum \frac{\lambda_j^2}{2\pi i} \int_b^{b_j} \frac{\Omega_j'(Y)\, dY}{Y - y} + e_2(y),$$

où la période Ω_j' correspond à Ω_j pour u, et ces sommes sont les « fonctions normales » de l'illustre géomètre. Rappelons les propriétés suivantes:

1°. Toute période est une fonction normale. Soit $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{2p}$, $2p$ périodes fondamentales, p étant le genre des sections planes de la surface. Les entiers $l_1^i, l_2^i, \ldots l_N^i$, formant le système des λ pour ω_i, ne dépendent pas de l'intégrale de première espèce choisie.

2°. Si $C_1 = C_2$, on a $\lambda_j^1 \equiv \lambda_j^2$, modulo $l_j^1, l_j^2, \ldots l_j^{2p}$. Plus généralement soient $C_1, C_2, \ldots C_s$, des courbes algébriques ne passant pas par les points bases de $\{H_y\}$, $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots \lambda_N^i$, les λ pour C_i. Si $\sum t_i C_i = 0$, on a aussi $\sum t_i \lambda_j^i \equiv 0$, modulo $l_j^1, l_j^2, \ldots l_j^{2p}$.

Des relations (3), (4), (5), on tire $\mu_j = m_1 \lambda_j^2 - m_2 \lambda_j^1$. De (5) on déduit en prenant le résidu à l'infini de $w(y)$, la valeur

$$\sum\nolimits_j \mu_j \int_b^{b_j} \Omega_j(Y)\, dY, \tag{6}$$

pour la période de l'intégrale double (1) par rapport au cycle Γ. En remarquant que cette période est indépendante de b, et par suite a une dérivée nulle par rapport à b, on obtient la relation $\sum \mu_j \Omega_j'(b) = 0$, ce qui vérifie que (6) est bien une période de (1) (Picard).

La période obtenue est évidemment nulle si $C_1 = C_2$, quand (1) est de seconde espèce, résultat que l'on peut déduire de la définition de Γ.

5. Pour achever la démonstration, nous aurons recours aux intégrales doubles sous forme normale et en même temps du type

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy \tag{7}$$

dont Mr. Picard a fait un usage constant, les ayant d'ailleurs introduites. Nous dirons des intégrales du type (7), qu'elles sont *impropres de deuxième espèce*. On peut évidemment supposer que le nombre ϱ de Mr. Picard est > 1. Soit $D_1, D_2, \ldots D_{\rho-1}$, un système de courbes formant base avec celle à l'infini, $g_i(x, y) = 0$ la projection de D_i, D'_i étant l'autre courbe de F avec la même projection. Il y a alors $\varrho - 1$ intégrales doubles telles que

$$(8) \qquad \iint \frac{Q_i(x, y, z)}{F'_z} \, dx\, dy = \iint \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

(U_i, V_i, du tipe $\dfrac{K(x, y, z)}{\varphi(y)\, g_i(x, y)\, F'_z}$; K polynome adjoint nul sur D'_i,

$\varphi(y)$ polynome),

telles que toute intégrale impropre de seconde espèce sous forme normale soit une combinaison linéaire de celles-ci, à une intégrale à périodes nulles près (Picard). Posons

$$\varepsilon(x, y) = \int^{x,y} \frac{Q_i(x, y, z)\, dx}{F'_z}.$$

Cette fonction est holomorphe en tout point à distance finie, extérieur aux plans $y = b_i$. Soit B_i le point de contact de $y = b_i$. Pour tous les points de ce plan autres que B_i, on peut toujours choisir le chemin d'intégration de manière que ε soit holomorphe en leur voisinage. Cela revient simplement à choisir une détermination convenable pour ε.

Ceci posé, l'intégrale suivante déjà considérée par Mr. Picard,

$$(9) \qquad \int (U_i - \varepsilon)\, dy - V_i\, dx,$$

est une intégrale de différentielles totales, car la condition d'intégrabilité est satisfaite. Soit $\varphi(y_j) = 0$, α_j la période logarithmique de (9) relative à H_{y_j}. On peut soustraire de (9) une intégrale de différentielles totales

$$\sum \int \frac{\alpha_j\, dy}{y - y_j}$$

de façon à éliminer les courbes logarithmiques du faisceau $\{H_y\}$. Cela revient à soustraire de U_i une function de y seul, ce qui ne change pas $\dfrac{\partial U_i}{\partial x}$. Les intégrales abéliennes

$$\int U_i\, dy \quad , \quad -\int V_i\, dx,$$

relatives à H_x, H_y, respectivement, auront alors comme seuls points logarithmiques à distance finie, ceux des groupes $H_x D_i$, $H_y D_i$, avec des périodes égales pour toutes deux à une même constante que l'on peut supposer égale à *un*.

6. Le plan à l'infini étant arbitraire, on peut supposer que U_i, V_i, ne deviennent infinies nulle part sur les Φ. On aura alors, en appliquant une transformation bien connue, pour la période de (8) par rapport à Γ, la valeur

$$\sum_{hk} \iint_{\Phi_{hk}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$$= m_1 \sum_k \int_{\zeta_k^2} (U_i\, dy - V_i\, dx) - m_2 \sum_h \int_{\zeta_h^1} (U_i\, dy - V_i\, dx).$$

Le coefficient de m_2 dans cette relation est égal à la somme des périodes logarithmiques à l'infini de l'intégrale abélienne

$$\int U_i\, dy - V_i\, dx,$$

relative à C_1, et par suite égale à celle des périodes logarithmiques à distance finie. Les seuls points logarithmiques à distance finie, sont ceux du groupe $C_1 D_i$, et ceux où $\varphi(y) = 0$. On pourra toujours supposer que parmi ces points ne se trouvent aucun des points B, et par suite, on pourra toujours choisir pour ε une détermination holomorphe au voisinage de l'un d'eux. Soit M un des points du premier type, M′ un du second, η, η' deux petits circuits autour de M, M′, dans C_1, ε_1, ε_1' deux détermination de ε holomorphes autour de M, M′, respectivement. On a

$$\int_\eta U_i\, dy - V_i\, dx = \int_\eta (U_i - \varepsilon_1)\, dy - V_i\, dx = 1,$$

$$\int_{\eta'} U_i\, dy - V_i\, dx = \int_{\eta'} (U_i - \varepsilon_1')\, dy - V_i\, dx = 0.$$

En désignant comme d'habitude par $[CD]$ le nombre de points du groupe CD commun à deux courbes C, D, le coefficient de m_2 dans l'expression obtenue pour la période de (8) par rapport à Γ, est donc égal à $[C_1 D_i]$. De même celui de m_1 est $-[C_2 D_i]$. D'où pour cette période la valeur $[(m_2 C_1 - m_1 C_2) D_i]$. Elle est nulle si $m_2[C_1 D_i] = m_1[C_2 D_i]$. D'ailleurs si E est une section plane, on a $m_2[C_1 H] = m_1[C_2 H] = m_1 m_2$. Donc si toutes les périodes des intégrales doubles (8) par rapport à Γ étaient nulles, on aurait $m_2[C_1 D] = m_1[C_2 D]$, pour toute courbe D de F, et par suite, (Severi), $tm_2 C_1 \equiv tm_1 C_2$. Ainsi si C_1 et C_2 sont algébriquement distinctes, il y a au moins une intégrale double de seconde espèce à période non nulle par rapport à Γ, et l'on n'a pas $\Gamma \sim 0$. C.Q.F.D.

7. Soit Γ_i le cycle analogue à Γ, et relatif aux courbes D_i, H, dans l'ordre nommé. Posons $m D_i - n_i H = G_i$, où n_i est l'ordre de D_i. Les courbes $G_1, G_3, \ldots G_{\rho-1}$, H, forment base. Le déterminant des périodes des intégrales (8) par rapport aux cycles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_{\rho-1}$, est égal à

$$|[G_j D_i]|,$$

et par suite il n'est pas nul. Donc, étant donnée l'intégrale de seconde espèce (1), il existe des constantes non toutes nulles a, telles que les périodes de

$$\iint \frac{P(x, y, z) - \sum_i a_i Q_i(x, y, z)}{F'_z} dx\, dy$$

qui est aussi sous forme normale, par rapport aux cycles Γ, soient toutes nulles.

On vérifie d'ailleurs par un calcul assez simple, que si

$$t_1 C_1 = t_0^1 H + \sum t_i^1 D_i \quad , \quad t_2 C_2 = t_0^2 H + \sum_i t_i^2 D_i ,$$

on a

$$m t_1 t_2 \Gamma \sim \sum (m_1 t_2 t_i^1 - m_2 t_1 t_i^2) \Gamma_i .$$

En définitive parmi les cycles Γ, il y en a $\varrho - 1$ linéairement indépendants, et les cycles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_{\rho-1}$, forment base, pour ceux de ce type.

Matematica. — *Sovra certe equazioni di composizione di seconda specie*. Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. In questa breve Nota proseguiamo una ricerca iniziata in due precedenti Note [1].

Ci proponiamo ora di assegnare la soluzione generale delle equazioni di composizione del tipo

$$\text{(1)} \qquad \overset{\times\times\times\times}{f}(\overset{}{n}) = a_1 n + a_2 \overset{\times\times}{n^2} + \cdots + a_m \overset{\times\times}{n^m} = \nu(xy) ,$$

ove $\nu(xy)$ sia un nucleo di Goursat ed abbia perciò la forma:

$$\nu(xy) = \sum \alpha'_{rs} h_r(x) k_s(y) .$$

[1] G. Andreoli, *Sulla risoluzione di certe equazioni di composizione*; *Sulla soluzione generale d'una classe di equazioni di composizione*. Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XXV, ser. 5ª, 2° sem. 1916.