# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XXVI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Un procedimento analogo, convenientemente esteso, serve a determinare l'integrale delle equazioni di Maxwell che discende dal teorema citato della Kowalewski, anche quando, in queste equazioni, si debba tener conto di correnti di conduzione, o di correnti di convezione.

Nei mezzi cristallini uniassici un procedimento della natura precedente si può applicare, solo, alle componenti delle forze elettrica e magnetica secondo l'asse di isotropia. Però, determinate queste due quantità, l'integrazione delle equazioni si compie nel modo più agevole.

## Matematica. — *Equazioni integrali singolari con nuclei analoghi a quelli di Evans.* Nota di Giulio Andreoli, presentata dal Socio V. Volterra.

1. In questa Nota tratteremo equazioni del tipo

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x - \beta y)\, \varphi(y)\, dy = f(x).$$

Porremo come condizione fondamentale che l'integrale

$$\text{(B)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} | n(\alpha x - \beta y) |\, dy$$

esista sempre, qualunque sia $x$.

Un'equazione analoga, in un caso particolarissimo, è stata già trattata dal Picard [1].

Premettiamo il seguente lemma:

*Se il nucleo $n$ è tale che esista l'integrale*

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x - \beta y)\, dy ,$$

*questo integrale si riduce ad una costante.*

Infatti, mutiamo $x$ in $x + \xi$, con $\xi$ arbitrario; l'integrale ora scritto diventa

$$\sigma(x + \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x - \beta y + \alpha\xi)\, dy .$$

Notiamo che $\beta$ non può essere nullo, poichè allora la $n$ non dipenderebbe dalla $y$, e l'integrale sarebbe infinito. Poniamo perciò

$$y = z - \frac{\alpha}{\beta}\xi \quad ; \quad dy = dz .$$

[1] T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, pag. 121 e seg.; ivi è citato e riportato l'esempio di E. Picard.

I limiti dell'integrale non cambiano; sarà dunque

$$\sigma(x+\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x-\beta z)\,dz=\sigma(x)\,,$$

da cui, ponendo $x=0$, si trae

$$\sigma(\xi)=\sigma(0)=h\,.$$

Si vede che soddisfatta la condizione (B), è di conseguenza soddisfatta la condizione enunciata nel lemma.

2. Dimostriamo ora che, almeno in un certo intorno di $\lambda=0$, la (A) ammette soluzione unica soddisfacente alla condizione

$$|\varphi(x)|<\Phi \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

se è anche

$$|f(x)|<\mathrm{F} \qquad (-\infty<x<+\infty)\,;$$

e che inoltre, almeno in quell'intorno, tale soluzione è sviluppabile in serie di potenze rispetto a $\lambda$.

Consideriamo lo sviluppo

$$(1)\qquad \theta(x)=f(x)-\lambda\int n(xs_1)\,f(s_1)\,ds+$$

$$+\lambda^2\int ds_2\int n(xs_2)\,n(s_2\,s_1)\,f(s_1)\,ds_1-\cdots$$

ove per brevità si ponga

$$n(\alpha x-\beta y)=n(xy)$$

e si tralascino i limiti d'integrazione.

Supponiamo d'aver già dimostrato che

$$\left|\int n(xs_m)\,ds_m\int n(s_m\,s_{m-1})\,ds_{m-1}\int\cdots\int n(s_1\,s)\,f(s)\,ds\right|\leq k_m\,;$$

in conseguenza di quanto abbiamo già detto sarà:

$$\left|\int n(xy)\,dy\int n(ys_m)\,ds_m\int\cdots\int n(s_1\,s)\,f(s)\,ds\right|\leq$$

$$\leq\int|n(xy)|\,dy\left\{\left|\int\cdots\int n(s_1\,s)\,f(s)\,ds\right|\right\}\leq\int|n(xy)|\,k_m\cdot dy\leq k\,k_m\,;$$

ed essendo

$$\left|\int n(xs)\,f(s)\,ds\right|\leq\int|n(xs)|\,|f(s)|\,ds\leq \mathrm{F}k\,,$$

pel principio d'induzione completa, avremo che

$$\left| \int n(xs_m)\, ds_m \int \cdots \int n(s_1\, s)\, f(s)\, ds \right| \leq \mathrm{F} k^m .$$

Ne segue che lo sviluppo (1) ammette come maggiorante la serie

$$\mathrm{F} \cdot \Sigma\, \lambda^m\, k^m\,; \tag{2}$$

e poichè questa converge assolutamente per

$$|\lambda k| < 1\,,$$

ne deduciamo che sotto tale condizione effettivamente la (1) rappresenta una serie che converge uniformemente nel campo $(-\infty\,,\,+\infty)$ rispetto alla $x$; e che anzi

$$|\,\theta(x)\,| \leq \frac{\mathrm{F}}{1 - |\lambda k|}\,. \tag{3}$$

Se invece di avere

$$|\,f(x)\,| < \mathrm{F}$$

si avesse solo

$$\left| \int n(xs_r)\, ds_r \int \cdots \int n(s_2\, s_1)\, f(s_1)\, ds_1 \right| < \mathrm{F}, \tag{4}$$

mentre gli integrali

$$\int n(xs_\varrho)\, ds_\varrho \int \cdots \int n(s_2\, s_1)\, f(s_1)\, ds_1 \qquad (\varrho < r)$$

esistono qualunque sia $x$, il ragionamento fatto vale ancora, come si vedrebbe trascurando i primi $r$ termini della (1). Seguendo il ragionamento che faremo, si vedrebbe che esistono

$$\theta(x)\;,\; \int n(xs)\, \theta(s)\, ds\,, \ldots,$$

ma che si può solo affermare che

$$\left| \int n(xs_r)\, ds_r \int \cdots \int n(s_2\, s_1)\, \theta(s_1)\, ds_1 \right| < \Theta \text{ (costante)},$$

e che in conseguenza resta invariata tutta la discussione.

3. Dimostriamo ora che per

$$|\lambda k| < 1\,,$$

la (1) rappresenta effettivamente la soluzione di A, e che tale soluzione è unica.

Poniamo

$$\theta(x) = \left\{ f(x) - \lambda \int n(xs)\, f(s)\, ds + \lambda^2 \int n(xs_1)\, ds_1 \int n(s_1 s)\, f(s)\, ds - \right.$$
$$\left. - \cdots + (-\lambda)^{m+1} \int n(xs_m)\, ds_m \int \cdots \int n(s_1 s)\, f(s)\, ds \right\} + \mathrm{R}_m(x) ;$$

in conseguenza sarà:

$$\theta(x) + \lambda \int n(xz)\, \theta(z)\, dz = \left\{ f(x) - \lambda \int n(xs)\, f(s)\, ds + \right.$$
$$\left. + \cdots + (-\lambda)^{m+1} \int n(xs_m)\, ds_m \int \cdots \int n(s_1 s)\, f(s)\, ds \right\} + \mathrm{R}_m(x) +$$
$$+ \lambda \left\{ \int n(xz)\, f(z)\, dz - \lambda \int n(xz)\, dz \int n(xs)\, f(s)\, ds + \right.$$
$$\left. + \cdots + (-\lambda)^{m+1} \int n(xz)\, dz \int n(zs_m)\, ds_m \int \cdots \int n(s_1 s)\, f(s)\, ds \right\} +$$
$$+ \lambda \int n(xz)\, \mathrm{R}_m(z)\, dz .$$

Per le ipotesi fatte sulla convergenza degli integrali, il primo e terzo termine si possono sommare membro a membro; spariscono tutti i sommandi eccetto il primo del primo termine e l'ultimo del terzo. Resta dunque:

$$\theta(x) + \lambda \int n(xz)\, \theta(z)\, dz =$$
$$= f(x) + \lambda(-\lambda)^{m+1} \int dz \int \cdots \int ds\, n(xz)\, n(zs_m) \ldots n(s_1 s)\, f(s)\, ds +$$
$$+ \mathrm{R}_m(x) + \lambda \int n(xz)\, \mathrm{R}(z)\, dz) .$$

Ma abbiamo già visto che la (1) ammette, per ogni valore di $x$, la (2) come maggiorante; ed essendo $|\lambda k| < 1$, ne viene in conseguenza che dato un $\varepsilon$ piccolo a piacere, esisterà un indice $\mu$ tale che per $m > \mu$ sia sempre

$$\left. \begin{aligned} &|\mathrm{R}_m(x)| < \varepsilon \\ &|\lambda^{m+2}| \left| \int dz \int \cdots \int ds\, n(xz)\, n(zs_m) \ldots n(s_1 s)\, f(s) \right| < \varepsilon \end{aligned} \right\} -\infty < x < +\infty .$$

Quindi sarà

$$\left| \int n(xz)\, \mathrm{R}_m(z)\, dz \right| \leq \int |n(xz)|\, |\mathrm{R}_m(z)|\, dz \leq \varepsilon \int |n(xz)|\, dz ,$$

ove, pel lemma enunciato, l'ultima quantità scritta è eguale ad $\varepsilon k$.

Ed avremo in conseguenza

$$\left|\theta(x) + \lambda \int n(xz)\, \theta(z)\, dz - f(x)\right| \leq \varepsilon + \varepsilon + |\lambda k|\, \varepsilon < 3\varepsilon .$$

con $\varepsilon$ piccolo ad arbitrio.

Quindi sarà precisamente

$$\theta(x) + \lambda \int n(xz)\, \theta(z)\, dz - f(x) = 0$$

cioè $\theta(x)$ sarà soluzione della (A). Il ragionamento fatto sussiste invariato nelle conclusioni, e poco modificato nella forma, anche nell'ipotesi più generale fatta colla (4).

4. Resta da mostrare che imposta la condizione

$$|\varphi(x)| < \Phi ,$$

[o quella più generale enunciata alla (4)], la soluzione è unica nel campo di validità dello sviluppo in serie.

Supposto infatti che esistano due soluzioni soddisfacenti a tale condizione, la loro differenza vi soddisferà ancora, e sarà soluzione dell'equazione omogenea

$$\omega(x) + \lambda \int n(xs)\, \omega(s)\, ds = 0 \qquad |\lambda k| < 1 . \tag{5}$$

Quindi, chiamato $\Omega$ il limite superiore di $|\omega(x)|$, sarà

$$|\omega(x)| = \left|\lambda \int n(xs)\, \omega(s)\, ds\right| \leq |\lambda| \int |n(xs)|\, |\omega(s)|\, ds \leq |\lambda k|\, \Omega .$$

D'altra parte, dalle (5) si trae successivamente

$$\int n(xs)\, \omega(s)\, ds = \lambda \int n(xs_1)\, ds_1 \int n(s_1 s)\, \omega(s)\, ds$$

$$\int n(xs_1)\, ds_1 \int n(s_1 s)\, \omega(s)\, ds = \lambda \int n(xs_2)\, ds_2 \int n(s_2 s_1)\, ds_1 \int n(s_1 s)\, \omega(s)\, ds .$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

Le prime $m$ di queste, moltiplicate rispettivamente per $\lambda, \lambda^2, \ldots \lambda^m$ e sommate tutte con la (5), dànno

$$\omega(x) = \lambda^{m+1} \int n(xs_m)\, ds_m \int \ldots \int n(s_1 s)\, \omega(s)\, ds$$

e quindi

$$|\omega(x)| \leq |\lambda|^{m+1} \int |n(xs_m)|\, ds_m \int \ldots \int |n(s_1 s)| \cdot |\omega(s)|\, ds \leq |\lambda^{m+1} k^{m+1}|\, \Omega ,$$

qualunque sia $m$. Ma $|\lambda k|^{m+1}$ tende a zero al crescere di $m$; se quindi e

$$|\omega(x)| < \Omega$$

sarà di conseguenza

$$\omega(x) = 0$$

salvo tutt'al più i punti d'un insieme di misura nulla.

Al posto dell'ultima condizione, si può porre la (4) ed il risultato non cambia.

Resta quindi dimostrato che per $|\lambda k| < 1$, la soluzione limitata della (A) è unica, se la $f(x)$ è limitata.

Epperò possiamo enunciare il

Teorema I. — *L'equazione*

$$\varphi(x) - \lambda \int n(\alpha x - \beta y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

*ammette, in un certo intorno di* $\lambda = 0$, *una soluzione unica, sviluppabile in serie di potenze della* $\lambda$, *e tale che*

$$|\varphi(x)| < \Phi \ , \ |f(x)| < \mathrm{F} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

*se esiste l'integrale*

$$\int |n(\alpha x - \beta y)|\, dy = k\,;$$

ed il

Teorema II. — *L'equazione stessa ammette, in un intorno di* $\lambda = 0$, *una soluzione unica soddisfacente alla*

$$\left| \int n(xs_m)\, ds_m \int \ldots \int n(s_1\, s)\, f(s)\, ds \right| < \Phi$$

*se*

$$\left| \int n(xs_m)\, ds_m \int \ldots \int n(s_1\, s)\, f(s)\, ds \right| < \mathrm{F}$$

*sempre che esista l'integrale*

$$\int |n(\alpha x - \beta y)|\, dy\,.$$

5. Osserviamo poi che l'esistenza di

$$\int n(xs_1)\, ds_1 \int n(s_1\, s)\, f(s)\, ds$$

unita a quella dell'integrale

$$\int |n(xs)|\, ds$$

implica che si abbia anche

$$\int n(xs_1)\,ds_1 \int n(s_1\,s)\,f(s)\,ds = \int \left\{ \int n(xs_1)\,n(s_1\,s)\,ds \right\} f(s)\,ds$$

$$\int n(xs_m)\,ds_m \int \ldots \int n(s_1\,s)\,f(s)\,ds = \int \left\{ \int n(xs_m)\,ds_m \int \ldots \int n(s_1\,s)\,ds_1 \right\} f(s)\,ds$$

Quindi, con uno sviluppo analogo allo sviluppo (1), si potrà addirittura costruire un nucleo risolvente, allorchè sia stato dimostrato che i nuclei iterati dedotti da un nucleo funzione d'una combinazione lineare di $x$ ed $y$, se esistono, conservano la stessa forma; e che se il nucleo primitivo soddisfa alla condizione B, anche i nuclei iterati vi soddisfano.

Tali proprietà risulteranno in una prossima Nota, come conseguenza di una teoria della composizione di tali nuclei.

Notiamo che le considerazioni qui svolte si possono riattaccare ad un precedente lavoro (1).

## Matematica. — *Su due applicazioni di un teorema di G. Boole alla statistica matematica.* Nota di F. P. CANTELLI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

1. Questo scritto fa seguito ad una mia precedente Nota (2); adopero, pertanto, gli stessi simboli di questa, premettendo ad essi un indice tutte le volte che occorra. Così, ad es., scriverò ${}_xM_n$ per indicare il valore medio di una variabile casuale $X_n$ e ${}_yM_s$ per indicare l'analogo valore di un'altra variabile casuale $Y_s$.

Nella indicata Nota ho mostrato come una estensione di un teorema di Boole (3) si renda utile nella risoluzione di un interessante problema; qui mostrerò due altre diverse applicazioni del teorema stesso, tentando, così, di toglierlo dall'oblio nel quale è stato lasciato.

(1) G. Andreoli, *Su un problema di meccanica ereditaria*, Atti R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. 50, 1915.

(2) *Sulla probabilità come limite della frequenza.* Questi Rendiconti, serie 5ª, vol. XXVI (1917).

(3) Il Boole, nel libro citato nella Nota precedente, dà il suo teorema sotto la forma

$$p_{i_1\,i_2 \cdots i_n} \geq p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_n} - (n-1)\,.$$

Ponendo $p_{i_r} = 1 - p_{e_r}$, si può anche scrivere

$$p_{i_1\,i_2 \cdots i_n} \geq 1 - (p_{e_1} + p_{e_2} + \cdots + p_{e_n})\,.$$

Quest'ultima si presta, come si è visto, alla estensione ad una infinità di eventi, contrariamente all'altra.