ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

implica che si abbia anche

$$\int n(xs_1)\,ds_1 \int n(s_1\,s)\,f(s)\,ds = \int \left\{ \int n(xs_1)\,n(s_1\,s)\,ds \right\} f(s)\,ds$$

$$\int n(xs_m)\,ds_m \int \ldots \int n(s_1\,s)\,f(s)\,ds = \int \left\{ \int n(xs_m)\,ds_m \int \ldots \int n(s_1\,s)\,ds_1 \right\} f(s)\,ds$$

Quindi, con uno sviluppo analogo allo sviluppo (1), si potrà addirittura costruire un nucleo risolvente, allorchè sia stato dimostrato che i nuclei iterati dedotti da un nucleo funzione d'una combinazione lineare di x ed y, se esistono, conservano la stessa forma; e che se il nucleo primitivo soddisfa alla condizione B, anche i nuclei iterati vi soddisfano.

Tali proprietà risulteranno in una prossima Nota, come conseguenza di una teoria della composizione di tali nuclei.

Notiamo che le considerazioni qui svolte si possono riattaccare ad un precedente lavoro [1].

Matematica. — *Su due applicazioni di un teorema di G. Boole alla statistica matematica.* Nota di F. P. Cantelli, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Questo scritto fa seguito ad una mia precedente Nota [2]; adopero, pertanto, gli stessi simboli di questa, premettendo ad essi un indice tutte le volte che occorra. Così, ad es., scriverò ${}_xM_n$ per indicare il valore medio di una variabile casuale X_n e ${}_yM_s$ per indicare l'analogo valore di un'altra variabile casuale Y_s.

Nella indicata Nota ho mostrato come una estensione di un teorema di Boole [3] si renda utile nella risoluzione di un interessante problema; qui mostrerò due altre diverse applicazioni del teorema stesso, tentando, così, di toglierlo dall'oblio nel quale è stato lasciato.

[1] G. Andreoli, *Su un problema di meccanica ereditaria*, Atti R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. 50, 1915.

[2] *Sulla probabilità come limite della frequenza.* Questi Rendiconti, serie 5ª, vol. XXVI (1917).

[3] Il Boole, nel libro citato nella Nota precedente, dà il suo teorema sotto la forma

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} \geq p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_n} - (n-1)\,.$$

Ponendo $p_{i_r} = 1 - p_{e_r}$, si può anche scrivere

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} \geq 1 - (p_{e_1} + p_{e_2} + \ldots + p_{e_n})\,.$$

Quest'ultima si presta, come si è visto, alla estensione ad una infinità di eventi, contrariamente all'altra.

2. Si ricordi che se, per un *determinato* valore di s, riesce sufficientemente alta la probabilità $P_{(s)}$ che sia

$$(1) \qquad -{}_x\alpha_s \leq {}_xM_{(s)} - X_{(s)} \leq + {}_x\alpha_s ,$$

si è condotti ad asserire, nelle pratiche applicazioni, che i valori che effettivamente assumerà la considerata differenza ${}_xM_{(s)} - X_{(s)}$ cadranno, *d'ordinario*, nell'intervallo $-{}_x\alpha_{(s)}$, $+{}_x\alpha_{(s)}$.

In modo analogo, se considerando diverse variabili casuali, *dipendenti* o *indipendenti*, $X_{(s)}$, $Y_{(t)}$, ... , $Z_{(v)}$, che sono rispettivamente medie di s , t , ... , v variabili casuali *indipendenti*, riesce sufficientemente alta la probabilità $P_{(s,t,\ldots,v)}$ della *coesistenza* delle ineguaglianze

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} -{}_x\alpha_s \leq {}_xM_{(s)} - X_{(s)} \leq + {}_x\alpha_s , \\ -{}_y\alpha_t \leq {}_yM_{(t)} - Y_{(t)} \leq + {}_y\alpha_t , \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ -{}_z\alpha_v \leq {}_zM_{(v)} - Z_{(v)} \leq + {}_z\alpha_v , \end{array} \right.$$

si potrà dire che i valori che effettivamente assumeranno le differenze

$$(3) \qquad {}_xM_{(s)} - X_{(s)} , \ldots , {}_zM_{(v)} - Z_{(v)} ,$$

cadranno, *d'ordinario*, simultaneamente, nei rispettivi intervalli

$$(4) \qquad -{}_x\alpha_s , + {}_x\alpha_s ; \ldots ; -{}_z\alpha_v , + {}_z\alpha_v .$$

Così, come esempio particolare, se una popolazione si distribuisce secondo certi caratteri a_1 , a_2 , ... , a_k e se riesce alta la probabilità che, su n individui scelti *a caso* da quella popolazione, le differenze, tra i valori che *potranno assumere* le frequenze relative dei caratteri a_1 , a_2 , ... , a_k e le frequenze corrispondenti che convengono alla intera popolazione (probabilità), cadano rispettivamente dentro certi intervalli, si potrà dire che, *d'ordinario*, per quel valore di n, i valori che *effettivamente assumeranno* le indicate differenze cadranno tutti nei rispettivi intervalli considerati.

Dovrà sempre essere

$$(5) \qquad P_{(s)} \geq P_{(s,t,\ldots,v)}$$

perchè si tratta, rispettivamente, della probabilità che si verifichi l'evento (1) e della probabilità che si verifichi l'evento (2) che è composto dell'evento (1) e di altri; e potrà riuscire $P_{(s,t,\ldots,v)}$ prossima allo zero quando riesca, invece, $P_{(s)}$ prossima all'unità.

Ora, mentre sono note delle formole che permettono di calcolare confini inferiori convenienti della probabilità $P_{(s)}$, o valori sufficientemente approssimati di questa, non sono note, per quanto mi consta, formole generali analoghe relative alla probabilità $P_{(s,t,\dots,v)}$.

La prima delle applicazioni, delle quali qui mi occupo, serve a mostrare come il teorema di Boole sia adatto a colmare, almeno in parte, la lacuna ora accennata; e mi limiterò a indicare una formola, che dà spesso un confine inferiore conveniente di $P_{(s,t,\dots,v)}$, dedotta dalle formole analoghe relative alle probabilità $P_{(s)}, P_{(t)}, \dots, P_{(v)}$.

Il confine inferiore, indicato, della probabilità $P_{(s,t,\dots,v)}$ conduce, sotto opportune condizioni, a dimostrare che si ha

$$(6) \qquad \lim_{\substack{s \to \infty \\ \dots\dots \\ v \to \infty}} P_{(s,\dots,v)} = 1 ,$$

e in ciò può vedersi una generalizzazione della *legge dei grandi numeri* la quale, come è noto, è espressa dalla relazione

$$(7) \qquad \lim_{s \to \infty} P_{(s)} = 1 .$$

La formola appresso indicata, inoltre, conduce a risultati numericamente più espressivi di quelli ottenuti nella Nota precedente.

3. È da indicare, in primo luogo, un teorema che fornisca limiti superiori generalmente convenienti delle probabilità relative al *non verificarsi* di ciascuna delle ineguaglianze (2), *a prescindere* dalle altre. Queste probabilità corrispondono alle $p_{e_1}, p_{e_2}, \dots, p_{e_n}$ che entrano nella formola di Boole, mentre la probabilità relativa alla *coesistenza* delle (2) corrisponde alla $p_{i_1 i_2 \dots i_n}$ della formola stessa.

A confini superiori convenienti delle probabilità indicate, si perviene usufruendo dei valori medi delle variabili casuali simbolicamente rappresentate da alcune potenze di ${}_xM_{(s)} - X_{(s)}, \dots, {}_zM_{(v)} - Z_{(v)}$.

Le espressioni che si ottengono riescono però complicate, nelle applicazioni, quando si vada oltre la quarta potenza. È perciò che mi limito a considerare soltanto le potenze non superiori alla quarta, scartando, anche per semplicità, la terza potenza la quale, ordinariamente, non ha grande peso nei risultati.

Vale il seguente teorema, che mi limito ad enunciare:

Il confine superiore più conveniente della probabilità che non sia

$$(8) \qquad -\lambda\sqrt{\sigma_2} \leq M - X \leq +\lambda\sqrt{\sigma_2}$$

è, quando siano noti soltanto i valori medi della seconda e della quarta potenza di **M — X**, *espresso da*

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{se}\quad \lambda < 1 \\[2ex] \dfrac{\dfrac{\sigma_4}{\sigma_2^2}-1}{\lambda^4 - 2\lambda^2 + \dfrac{\sigma_4}{\sigma_2^2}} & \text{,,}\quad \lambda > \sqrt{\dfrac{\sigma_4}{\sigma_2^2}} \\[4ex] \dfrac{1}{\lambda^2} & \text{,,}\quad 1 \leq \lambda \leq \sqrt{\dfrac{\sigma_4}{\sigma_2^2}} \end{array}\right.$$

Siccome, ordinariamente, nel caso studiato, è la seconda condizione che viene verificata, adopero, in seguito, il confine superiore che corrisponde a questa condizione, il quale, del resto, vale anche per qualunque $\lambda > 1$ ([1]).

4. Quando, nelle ineguaglianze (2), si ponga

$$(10)\qquad {}_x\alpha_s = {}_x\lambda_s \sqrt{\mathrm{E}[{}_x\mathrm{M}_{(s)} - \mathrm{X}_{(s)}]^2}, \ldots, {}_z\alpha_v = {}_z\lambda_v \sqrt{\mathrm{E}[{}_z\mathrm{M}_{(v)} - \mathrm{Z}_{(v)}]^2}$$

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} h(x,s) = \mathrm{E}[{}_x\mathrm{M}_{(s)} - \mathrm{X}_{(s)}]^4 : \{\mathrm{E}[{}_x\mathrm{M}_{(s)} - \mathrm{X}_{(s)}]^2\}^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h(z,v) = \mathrm{E}[{}_z\mathrm{M}_{(v)} - \mathrm{Z}_{(v)}]^4 : \{\mathrm{E}[{}_z\mathrm{M}_{(v)} - \mathrm{Z}_{(v)}]^2\}^2, \end{array}\right.$$

allora il confine superiore sopra scelto e il teorema di Boole permettono di stabilire:

Un confine inferiore della probabilità $\mathrm{P}_{(s,t,\ldots,v)}$, *relativa alla coesistenza delle* (2), *é espresso da*

$$(12)\qquad 1 - \left[\frac{h(x,s)-1}{{}_x\lambda_s^4 - 2\,{}_x\lambda_s^2 + h(x,s)} + \cdots + \frac{h(z,v)-1}{{}_z\lambda_v^4 - 2\,{}_z\lambda_v^2 + h(z,v)}\right]$$

che costituisce la formola che volevo indicare.

Se poi si tiene presente, adottando sempre i simboli della Nota precedente, che è

$$(13)\qquad \mathrm{E}[{}_x\mathrm{M}_{(s)} - \mathrm{X}_{(s)}]^2 = \frac{{}_x\sigma_{2,(s)}}{s}, \ldots, \mathrm{E}[{}_z\mathrm{M}_{(v)} - \mathrm{Z}_{(v)}]^2 = \frac{{}_z\sigma_{2,(v)}}{v},$$

le (10) e (12) permettono di dedurre facilmente:

([1]) Il confine superiore scelto si deduce sostituendo la (27) nella (26) della Nota: *Intorno ad un teorema fondamentale della teoria del rischio* (Bollettino dell'Associazione degli Attuari italiani, n. 24, Milano 1911).

Se al crescere di $s, t, \ldots, v$, i valori

$$ {}_x\sigma_{2,(s)}, \ldots, {}_z\sigma_{2,(v)}, h(x, s), \ldots, h(z, v) $$

si mantengono inferiori ad un numero finito assegnato, e i valori ${}_x\alpha_s$, $\ldots, {}_z\alpha_v$ *superiori ad un numero* $a > 0$, *si ha*

$$ (14) \qquad \lim_{\substack{s \to \infty \\ \cdots \\ v \to \infty}} P_{(s,t,\ldots,v)} = 1 . $$

5. Quando si tratti di un gran numero di variabili casuali $X_{(s)}, Y_{(t)}, \ldots, Z_{(v)}$ può convenire di adottare, invece della (12), un'altra espressione che da essa si deduce.

Valgono, identicamente, la relazione

$$ (15) \qquad \frac{h(x, s) - 1}{{}_x\lambda_s^4 - 2\,{}_x\lambda_s^2 + h(x, s)} = \frac{h(x, s) - 1}{{}_x\lambda_s^4} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{2}{{}_x\lambda_s^2} + \dfrac{h(x, s)}{{}_x\lambda_s^4}} $$

e le analoghe per le variabili casuali $Y_{(t)}, \ldots, Z_{(v)}$. Se al denominatore dell'ultimo fattore della (15), e delle analoghe, si sostituisce un confine inferiore L dei denominatori stessi, si deduce dalla (12) il confine inferiore di $P_{(s,t,\ldots v)}$, meno conveniente del precedente,

$$ (16) \qquad 1 - \frac{1}{L}\left[\frac{h(x, s) - 1}{{}_x\lambda_s^4} + \cdots + \frac{h(z, v) - 1}{{}_z\lambda_v^4}\right] $$

ma più agevole per le determinazioni numeriche.

Ricordando, poi, che valgono le relazioni

$$ (17) \qquad \left\{ \begin{aligned} & E[{}_xM_{(s)} - X_{(s)}]^4 = \frac{{}_x\sigma_{4,(s)}}{s^3} + 3\left(1 - \frac{1}{s}\right)\frac{{}_x\sigma'_{2,(s)}}{s^2}, \ldots, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & E[{}_zM_{(v)} - Z_{(v)}]^4 = \frac{{}_z\sigma_{4,(v)}}{v^3} + 3\left(1 - \frac{1}{v}\right)\frac{{}_z\sigma'_{2,(v)}}{v^2}, \end{aligned} \right. $$

se si tengono pure presenti le (10), (11), (13), quando si ammetta che siano A, B confini superiori finiti, rispettivamente delle successioni ${}_x\sigma_{4,(s)}, \ldots, {}_z\sigma_{4,(v)}$; ${}_x\sigma'_{2,(s)}, \ldots, {}_z\sigma'_{2,(v)}$ e che sia C_1 un confine inferiore della successione ${}_x\sigma_{2,(s)}, \ldots, {}_z\sigma_{2,(v)}$, si ricava, dalla (16), l'altra ineguaglianza

$$ (18) \qquad P_{(s,t,\ldots,v)} > 1 - \frac{1}{L}\left[A\left(\frac{1}{{}_x\alpha_s^4\, s^3} + \cdots + \frac{1}{{}_z\alpha_v^4\, v^3}\right) + \right. $$
$$ \left. + (3B - C_1^2)\left(\frac{1}{{}_x\alpha_s^4\, s^2} + \cdots + \frac{1}{{}_z\alpha_v^4\, v^2}\right)\right]. $$

Se, inoltre, è: C un confine superiore finito di ${}_x\sigma_{2,(s)}, \dots, {}_z\sigma_{2,(v)}$; α un confine inferiore di ${}_x\alpha_s, \dots, {}_z\alpha_v$; r un analogo confine dei numeri $s, t, \dots, v$, si può porre

$$L = 1 - \frac{2}{\alpha^2} \cdot \frac{C}{r}. \tag{19}$$

La (18), meno conveniente della (16), è tale che, pur sostituendo in essa il secondo membro della (19), conduce, quando si applichi al caso particolare in cui le variabili casuali $X_{(s)}, \dots, Z_{(v)}$ coincidano con le variabili $X_{(s)}, X_{(s+1)}, \dots, X_{(v)}$, di cui alla Nota precedente, e poi venga estesa al caso di una successione illimitata di variabili $X_{(s)}, X_{(s+1)}, \dots$, tenuto conto che la successione $M_{(s)}, M_{(s+1)}, \dots$ tenda ad un limite M, a risultati più espressivi di quelli corrispondenti indicati nella Nota stessa, purchè s sia sufficientemente elevato. Ma su ciò non mi intrattengo oltre.

6. L'altra applicazione del teorema di Boole, della quale mi occupo, riguarda la *teoria del rischio* nelle assicurazioni (5). Evito, per semplicità, il linguaggio e i particolari inerenti alla tecnica assicurativa.

Si immagini un Istituto il quale, al tempo t, abbia assunto degli impegni verso un numero N di assicurati, dai quali riceva in compenso certe somme. Si ammetta che siano rappresentabili per mezzo di una variabile casuale $X_{(0,r)}$ le perdite, positive o negative (guadagni), che può subire l'Istituto stesso, nell'intervallo $(t, t+r)$, a seconda dei diversi raggruppamenti cui possono dar luogo le eliminazioni degli N individui dall'Istituto considerato.

Mi pongo, per semplicità, nel caso in cui sia, per qualunque valore intero di r, $E[X_{(0,r)}] = 0$ e considero

$$E[X_{(0,r)}]^2 = M_r. \tag{20}$$

Sarà $M_r = 0$ per ogni $r \geq \omega$, se è nulla la probabilità che, dopo l'epoca $t + \omega$, qualcuno degli N individui considerati non si sia eliminato dall'Istituto.

Siccome un confine inferiore della probabilita P_1 che sia

$$-\infty < X_{(0,\omega)} \leq \lambda \sqrt{M_\omega} \tag{21}$$

è espresso (6) da $\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$, si può dire che l'Istituto resta garantito, al

(5) Cfr. H. Poterin du Motel, *Technique de l'assurance sur la vie* (d'après l'article allemand de G. Bohlmann) [Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, tome I, vol. IV, fasc. IV (1911), pp. 575-590]. U. Broggi, *Matematica attuariale* [Hoepli, Milano (1906), pp. 307-344].

(6) loc. cit. (4).

tempo t, con una probabilità superiore a $\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}$ che, *alla fine del periodo* $(t, t+\omega)$, la perdita non superi la somma $\lambda\sqrt{M_\omega}$.

Confini inferiori più elevati di P_1 possono ottenersi tenendo conto dei valori medî delle potenze superiori alla seconda di $X_{(0,\omega)}$; si ottengono espressioni, anche limitandosi alla quarta potenza, che generalmente conducono, nel caso studiato, a calcoli lunghi sì che, almeno per ora, sono da scartare. Se, però, il numero N degli individui considerati è sufficientemente grande vale ordinariamente, per le perdite, con buona approssimazione, la legge di probabilità gaussiana degli errori e si può scrivere

$$P_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt. \tag{22}$$

7. Si può ricercare, *invece*, la probabilità P_2 che la perdita dell'Istituto non superi la somma $\lambda\sqrt{M_\omega}$ alla fine di *tutti* i periodi $(t, t+r)$, $r = 1, 2, \dots, \omega$.

L'applicazione del teorema di Boole permette di asserire, quando valga, per le perdite, la legge di probabilità sopra indicata, in ogni periodo $(t, t+r)$, e quando si ponga

$$m_r = \frac{M_\omega}{M_r}, \tag{23}$$

che un confine inferiore di P_2, ossia della probabilità della *coesistenza* delle ineguaglianze

$$-\infty < X_{(0,1)} \leq \lambda\sqrt{M_\omega}, \dots, -\infty < X_{(0,\omega)} \leq \lambda\sqrt{M_\omega}, \tag{24}$$

è dato da

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=1}^{r=\omega} \int_{\lambda\sqrt{\frac{m_r}{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt. \tag{25}$$

8. Si ha normalmente $M_1 < M_2 < \dots < M_\omega$ e se si ha pure, ad es., $\omega \leq 100$, la (25) permette di scrivere

$$P_2 > 1 - \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt. \tag{26}$$

Se si vuole che sia $P_2 = P_1$, il valore λ_1 di λ, cui si riferisce P_2, non potrà essere inferiore al valore di λ cui si riferisce P_1. Assegnato P_1, le

(22), (26) permettono di dedurre immediatamente che un valore l, più elevato di λ_1, si ha dall'equazione

$$(27)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{l}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{100\,.\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\,.$$

Risulta, per i valori di λ che più interessano:

$$\lambda = 3\,,\ l = 4{,}19\,..\ ;\ \lambda = 4\,,\ l = 4{,}97\,...$$

La questione, sopra indicata, inerente alla teoria del rischio, richiede ulteriori considerazioni quando si connetta col normale svolgimento degli affari di un Istituto di assicurazioni.

Correzioni alla Nota precedente: Al denominatore della seconda delle formole (15) togliere il fattore $\frac{1}{2}$; al denominatore del 2° membro della (25) sostituire 2^{s-1} a 2^s; a pag. 45 sostituire 10.000.000.000 a 1.000.000.000.

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali e le equazioni integro-differenziali correlative.* Nota di E. Daniele, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Risulta dalle ricerche del prof. Volterra sulle operazioni di composizione e sulle funzioni permutabili che ad ogni problema algebrico o differenziale, — la cui soluzione si ottenga con funzioni che siano, nell'intorno dell'origine, olomorfe, oppure presentino un punto di diramazione od un polo, oppure una singolarità logaritmica, — corrisponde, secondo una determinata regola, un problema integrale o integro-differenziale che si risolve con funzioni olomorfe in tutto il piano oppure dotate, tutt'al più, delle singolarità dianzi accennate. Queste ricerche hanno la loro base nel noto volume *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. IX-XIII, e trovano il loro completamento nella recente Memoria *Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione* (Mem. d. R. Acc. d. Lincei, ser. 5ª, vol. XI, fasc. 4°, 1916), dove sono definite, almeno per la composizione di 1ª specie, le potenze di composizione ad esponente qualunque, nonchè i logaritmi di composizione.

Consideriamo per semplicità un'equazione differenziale ordinaria:

$$(\mathrm{A})\qquad \mathrm{F}(x\,, y\,, y'\,, \ldots\,, y^{(n)}) = 0\,.$$