ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Sulla varietà cubica con dieci punti doppî dello spazio a quattro dimensioni, e sulla configurazione di quindici cerchi dello spazio ordinario studiata dallo Stephanos.* Nota I di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio E. BERTINI.

Le considerazioni delle mie due Note recentemente pubblicate in questi Rendiconti (¹) si estendono ad uno spazio lineare S_r di r dimensioni (con $r > 3$), quando si parta da una configurazione formata (con certe condizioni di cui dirò più innanzi), anzichè di piani e di rette, d'iperpiani e di spazî lineari S_{r-2} ad $r-2$ dimensioni. Negli iperspazî però la determinazione di tutte le possibili configurazioni del tipo a cui ho alluso si esaurisce per mezzo di un risultato, che è molto più semplice che non nello spazio ordinario, in quanto che — senza fare nessuna ipotesi preventiva sui numeri x, y, n, k che tra poco definirò — ne resta caratterizzata unicamente la varietà cubica con 10 punti doppî dell'S_4.

Com'è noto (²), i 10 punti doppî di una tale varietà si distribuiscono in 15 quaterne poste risp. sopra 15 piani, che sono i soli piani contenuti nella varietà; ed esistono 15 spazî (a tre dimensioni) di cui ciascuno contiene tre dei piani, mentre per ognuno dei piani stessi passano tre di quegli spazî. Oltre a ciò, ogni spazio contenente due dei piani ne contiene anche un terzo; e uno dei 15 piani, il quale non giaccia in uno dei 15 spazî, incontra questo spazio in una retta posta sopra uno dei tre piani contenuti nello spazio considerato.

Queste proprietà si invertono completamente col seguente teorema (n. 1):

Nello spazio S_r (con $r > 3$) si abbia una configurazione formata di x spazî S_{r-2} (tre qualunque dei quali non passanti per uno stesso S_{r-3}) e di y iperpiani, tali che in ognuno degli iperpiani esistano n degli S_{r-2} e per ognuno degli S_{r-2} passino k degli iperpiani. Si suppongano inoltre soddisfatte queste due condizioni:

(¹) *Sopra una classe di configurazioni di rette e di piani*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª, vol. XXV, sem. II, 1916, pag. 258; *Proprietà caratteristiche della configurazione formata dalle rette e dai piani tritangenti di una superficie del terzo ordine*, id., pag. 367.

(²) Segre, *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni*, Atti della R. Acc. di Torino, vol. XXII (1887), pag. 791; *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni*, ecc., Memorie della R. Accad. di Torino, serie II, vol. XXXIX (1889), pag. 3; Castelnuovo, *Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a 4 dimensioni*, Atti del R. Istituto Veneto, serie VI, vol. VI (1888), pag. 525. Cfr. pure Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa 1907, pag. 176.

(I) *se due degli* S_{r-2} *si tagliano in un* S_{r-3}, *epperò giacciono in un iperpiano, questo appartenga alla configurazione, quindi contenga altri* $n-2$ *di quegli* S_{r-2};

(II) *se uno degli* S_{r-2} *e uno degli iperpiani non si appartengono. l'* S_{r-2} *tagli l'iperpiano in un* S_{r-3} *situato in uno degli* n S_{r-2} *contenuti nell' iperpiano.*

Orbene, se, per escludere casi privi d' interesse, si suppone $n \geq 3$, $k \geq 3$ [1], ***esiste una sola di siffatte configurazioni***, *ed è quella formata dai 15 piani di una varietà cubica con 10 punti doppî dell'* S_4, *e dai 15 spazî (a tre dimensioni) che li contengono a tre a tre.*

L'interpretazione di questo teorema nello spazio di quattro dimensioni formato dalle sfere dello spazio ordinario, conduce immediatamente (n. 2) alla notevole configurazione di 15 cerchi dello spazio, che fu per la prima volta studiata dal sig. Stephanos [2] e della quale sono così anche poste in evidenza delle proprietà semplici, e di natura interamente elementare, che servono a caratterizzarla.

Nel n. 3 si riprende l'anzidetta varietà cubica dell' S_4 allo scopo d'invertire alcune proprietà della configurazione formata dai suoi 10 punti doppî e dai suoi 15 piani.

1. Come nella mia prima Nota citata, i numeri x, y, n, k sono legati dalle relazioni

$$x = n[(n-1)(k-1)+1],$$
$$y = k[(n-1)(k-1)+1],$$

[1] Per $k=1$ la configurazione si riduce ad un unico iperpiano e ad un numero qualunque di suoi S_{r-2}. Se $k=2$, essa è formata di due gruppi di n iperpiani ciascuno, e degli n^2 S_{r-2} in cui gl'iperpiani dell'un gruppo incontrano quelli dell'altro. Se $n=1$, la configurazione consta di un unico S_{r-2} e di un numero qualunque d'iperpiani passanti per esso. Per $n=2$ si ha $x=2k$, $y=k^2$, e i $2k$ S_{r-2} si distribuiscono in due gruppi $A', A'', \ldots, A^{(k)}$ e $B', B'', \ldots, B^{(k)}$, di k spazî ciascuno, in modo che due spazî di uno stesso gruppo si tagliano in un S_{r-4}, mentre ogni spazio dell'un gruppo incontra ogni spazio dell'altro in un S_{r-3}. Ma allora le intersezioni, ad esempio, di A' e A'' con B' debbono avere in comune l' S_{r-4} in cui si secano A' e A'', epperò i $2k$ S_{r-3} passano tutti per un medesimo S_{r-4}. I due gruppi di k S_{r-2} si ottengono dunque proiettando k generatrici di una schiera e k generatrici dell'altra schiera di una stessa quadrica a due dimensioni, da un S_{r-4} generico; mentre gli iperpiani della configurazione sono quelli che contengono, negli n^2 modi possibili, due S_{r-2} dei due gruppi.

[2] *Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace*, Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. XCIII (1881), pag. 578; *Sur une configuration de quinze cercles et sur les congruences linéaires de cercles dans l'espace*, id., pag. 633. Le proprietà soltanto enunciate dal sig. Stephanos furono poi dimostrate, con altre, dal signor Koenigs, *Contributions à la théorie du cercle dans l'espace*, Ann. de la Faculté des sciences de Toulouse. série I, t. II (1888), Mém. F, e dal sig. E. Cosserat, *Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace*, id., t. III (1889), Mém. E. Cfr. anche due Note del Cosserat nei Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. CVI (1888), p. 1467 e 1514, e il recentissimo libro del sig. Coolidge, *A treatise on the circle and the sphere*, Oxford 1916, p. 474 e seg.

epperò $x > n^2$. E, come là, si riconosce che, chiamando a_{ij} gli S_{r-2} della configurazione, si possono con essi formare il quadro

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ed i $k-2$ quadri

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}^{(i)} & a_{23}^{(i)} & \dots & a_{2n}^{(i)} \\ a_{31} & a_{32}^{(i)} & a_{33}^{(i)} & \dots & a_{3n}^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}^{(i)} & a_{n3}^{(i)} & \dots & a_{nn}^{(i)} \end{vmatrix} \qquad (i=1,2,\dots,k-2),$$

ciascuno dei quali ha le due proprietà: 1ª) gli S_{r-2} di ogni riga verticale, come pure quelli delle due prime orizzontali, giacciono in uno stesso iperpiano; 2ª) gli S_{r-2}, che nella terza, quarta, ..., n^{ma} orizzontale seguono risp. $a_{31}, a_{41}, \dots, a_{n1}$, stanno risp. con questi in un iperpiano.

Si ottengono tutti gli S_{r-2} della configurazione aggiungendo ai precedenti quelli contenuti nei $k-2$ iperpiani della configurazione che passano per a_{11} e sono diversi da $a_{11}\,a_{12}\dots a_{1n}$, $a_{11}\,a_{21}\dots a_{n1}$.

Gli S_{r-2} *della configurazione appartengono tutti ad una (sola) ipersuperficie irriducibile d'ordine* n.

Generalizzando il ragionamento del n. 4 della detta Nota, cominciamo col dimostrare che per gli S_{r-2} del quadro (1) passa un fascio d'ipersuperficie F^n d'ordine n. Perchè una tale F^n contenga a_{11}, occorre che sia indeterminata la sua sezione con a_{11}, ciò che importa $\binom{n+r-2}{r-2}$ condizioni lineari per F^n. Lo spazio a_{12} taglia a_{11} in un S_{r-3}; perciò, se si richiede che F^n contenga pure a_{12}, dev'essere indeterminata l'ipersuperficie d'ordine $n-1$ e di $r-3$ dimensioni, residua intersezione di F^n con a_{12}, e ciò impone ad F^n (al più) altre $\binom{n+r-3}{r-2}$ condizioni lineari. Così continuando, risulta che i successivi passaggi di F^n per $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ importano per F^n (al più)

$$\binom{n+r-2}{r-2}+\binom{n+r-3}{r-2}+\dots+\binom{r-1}{r-2}=\binom{n+r-1}{r-1}-1$$

condizioni lineari. Similmente i successivi passaggi per $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ dànno (al più) altre

$$\binom{n+r-3}{r-2}+\binom{n+r-4}{r-2}+\cdots+\binom{r-2}{r-2}=\binom{n+r-2}{r-1}$$

condizioni lineari; e i successivi passaggi per $a_{31}, a_{41}, \ldots, a_{n1}$ (al più) altre

$$\binom{n+r-4}{r-2}+\binom{n+r-5}{r-2}+\cdots+\binom{r-1}{r-2}=\binom{n+r-3}{r-1}-1.$$

Tenendo poi conto che $a_{3i}, a_{4i}, \ldots, a_{ni}$ $(i=2, 3, \ldots, n)$ tagliano risp. $a_{31}, a_{41}, \ldots, a_{n1}$ in un S_{r-3}, e inoltre che per $i=3, 4, \ldots, n$ ciascuno di essi incontra in un S_{r-3} uno (solo) degli spazî $a_{3j}, a_{4j}, \ldots, a_{nj}$ $(i \neq j,\ j=3, 4, \ldots, n)$, si conclude che i passaggi successivi per $a_{32}, a_{42}, \ldots, a_{n2}$; per $a_{33}, a_{43}, \ldots, a_{n3}$; ... impongono ad F^n altre condizioni lineari, il cui numero è al più

$$\binom{n+r-5}{r-2}+\binom{n+r-6}{r-2}+\cdots+\binom{r-2}{r-2}$$
$$+\binom{n+r-6}{r-2}+\binom{n+r-7}{r-2}+\cdots+\binom{r-2}{r-2}$$
$$+$$
$$+\binom{r-1}{r-2}+\binom{r-2}{r-2}$$
$$+\binom{r-2}{r-2},$$

ossia

$$\binom{n+r-4}{r-1}+\binom{n+r-5}{r-1}+\cdots+\binom{r}{r-1}+\binom{r-1}{r-1}.$$

Ad F^n risultano così imposte complessivamente al più

$$\binom{n+r}{r}-2$$

condizioni lineari. Ma il sistema lineare di tali F^n non può, evidentemente, aver dimensione superiore all' unità, quindi è un fascio.

Fissato ora un S_{r-2} qualunque della configurazione non compreso nel quadro (1), esso incontra n degli S_{r-2} del quadro in un S_{r-3}, e l' ipersuperficie del fascio passante per un punto generico di quell' S_{r-2} contiene tutti gli S_{r-2} della configurazione, come subito risulta dalla considerazione dei quadri (1) e (2).

L'ipersuperficie è irriducibile, perchè, se si spezzasse in altre due F' ed F'', ad esempio a_{11} apparterrebbe ad F' e non ad F''; quindi anche $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$, giacendo in uno stesso iperpiano con a_{11}, ma non con alcuno degli spazî $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$, apparterrebbero ad F', il che è assurdo.

Sia F l'ipersuperficie così determinata. Se le equazioni di un suo S_{r-2} sono

$$L = 0 \quad , \quad M = 0 ,$$

l'equazione di F sarà del tipo

$$L\varphi + M\psi = 0 ,$$

dove φ e ψ sono forme di ordine $n-1$ nelle coordinate. Perciò ogni punto della varietà ad $r-4$ dimensioni e d'ordine $(n-1)^2$ in cui si tagliano $L=0$, $M=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ sarà doppio per F (¹). Una tale varietà doppia di F esiste dunque in ogni S_{r-2} della configurazione. Ma, considerando un iperpiano qualunque di questa, le varietà doppie contenute ne' suoi n spazî S_{r-2} debbono appartenere agli S_{r-3} in cui gli stessi S_{r-2} si tagliano a due a due; per conseguenza ciascuna si spezza in $n-1$ varietà di ordine $n-1$.

In conclusione, in ognuno degli iperpiani della configurazione l'ipersuperficie F possiede $\dfrac{n(n-1)}{2}$ varietà doppie V, di dimensione $r-4$ e di ordine $n-1$, situate negli S_{r-3} in cui a due a due s'incontrano gli n S_{r-2} della configurazione contenuti nell'iperpiano.

Ma se per uno degli S_{r-2} della configurazione si conducono due iperpiani della medesima, una qualunque delle varietà V contenute nell'S_{r-2} starà pure e in uno degli altri S_{r-2} del primo iperpiano e in uno degli altri S_{r-2} del secondo, cosicchè i tre S_{r-2} passeranno per un medesimo S_{r-3}, contrariamente ad una delle ipotesi ammesse.

L'assurdo cade soltanto supponendo $r=4$ e poi $n=3$, il che conduce alla varietà cubica con 10 punti doppî dell'S_4. Così il teorema enunciato in principio è dimostrato.

2. Il sig. Stephanos (loc. cit.) ha studiata una configurazione di 15 cerchi e 15 sfere (nello spazio ordinario), la quale presenta, tra le altre, le seguenti proprietà:

a) sopra ognuna delle sfere esistono tre dei cerchi, e per ognuno dei cerchi passano tre delle sfere;

b) se due dei cerchi stanno sopra una delle sfere, questa sfera è della configurazione, epperò contiene un terzo cerchio della medesima;

c) uno dei cerchi e una delle sfere, che non si appartengano, sono tali che il cerchio seca la sfera in due punti posti sopra uno dei tre cerchi tracciati sulla sfera.

(¹) Cfr. la citata Memoria del sig. Segre, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni*, n. 5.

Il teorema del numero precedente, applicato allo spazio di sfere, permette senz'altro di affermare che, *inversamente, la configurazione dello Stephanos è la sola composta di x cerchi (tre qualunque dei quali non passino per i medesimi due punti) e di y sfere, tali che:*

1) *su ognuna delle sfere stiano n dei cerchi, e per ognuno dei cerchi passino k delle sfere;*

2) *ogni sfera che passi per due dei cerchi appartenga alla configurazione, epperò contenga altri $n-2$ cerchi di questa;*

3) *se uno dei cerchi e una delle sfere non si appartengono, il cerchio incontri la sfera in due punti situati sopra uno degli n cerchi esistenti su essa.*

Nell' identità che questa configurazione presenta con quella del n. 1 e con quella formata dalle 15 rette d'una superficie cubica estranee ad una bissestupla e dai 15 piani che le contengono a tre a tre, i sei sistemi di cinque cerchi ciascuno, che lo Stephanos ha chiamati *pentacicli*, corrispondono alle sei quintuple di *piani associati* considerate dal Segre e dal Castelnuovo ([1]), ed ai sei sistemi di cinque rette sghembe che si possono formare con le 15 rette nominate di una superficie cubica. Si può così verificare, ad esempio, la elegante costruzione che lo Stephanos ha assegnata per il pentaciclo determinato da quattro cerchi dati ([2]); ecc.

([1]) Nella prima delle due Note dello Stephanos trovasi già, senza dimostrazione, il teorema relativo ai sistemi di cinque piani associati dell' S_4, che fu poi stabilito, indipendentemente così da quell'autore come l'uno dall'altro, dal Segre e dal Castelnuovo nei citati lavori, e dal Segre anche nella Nota: *Alcune considerazioni elementari sulla incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni*, Rend. del Circolo mat. di Palermo, t. II (1888), pag. 45.

([2]) Questa costruzione si fonda sull'osservazione, dovuta al sig. Darboux [*Sur une nouvelle définition de la surface des ondes*, Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. XCII (1881), pag. 446], che, dati nello spazio tre cerchi A, B, C, esiste generalmente un cerchio K, ed uno solo, appoggiato in due punti a ciascuno di essi. Chiamando, col Darboux, *centro radicale* di due cerchi dello spazio il centro radicale di tutte le sfere passanti per i due cerchi, il piano di K è quello che contiene i tre centri radicali dei cerchi A, B, C presi a due a due. Il cerchio K è quindi indeterminato quando e soltanto quando i tre detti centri radicali coincidono, ossia quando e soltanto quando i tre dati cerchi sono ortogonali ad una medesima sfera.

Ora ricordiamo la costruzione data dal Segre e dal Castelnuovo per dedurre da quattro piani generici $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ di S_4 il piano ε ad essi associato. Si costruiscono i quattro piani $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ che secano in rette ordinatamente i piani delle terne $\beta\gamma\delta$, $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\beta\delta$, $\alpha\beta\gamma$, e allora i quattro punti $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ giacciono in un piano, che è appunto ε. In virtù di quanto precede, la proprietà di qui risultante per il cerchio E, che completa il pentaciclo determinato da quattro dati cerchi A, B, C, D, è dunque la seguente. Si considerano i quattro nuovi cerchi A', B', C', D' che incontrano in due punti risp. i cerchi delle quattro terne BCD, ACD, ABD, ABC, ed allora esiste un cerchio E tale che i cerchi di ciascuna delle terne $AA'E$, $BB'E$, $CC'E$, $DD'E$ hanno lo stesso centro radicale. Questa proprietà trovasi enunciata nella seconda Nota dello Stephanos.