ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

(22), (26) permettono di dedurre immediatamente che un valore l, più elevato di λ_1, si ha dall'equazione

$$(27) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{l}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{100 . \sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt .$$

Risulta, per i valori di λ che più interessano:

$$\lambda = 3 \text{ , } l = 4{,}19 \ldots \text{ ; } \lambda = 4 \text{ , } l = 4{,}97 \ldots$$

La questione, sopra indicata, inerente alla teoria del rischio, richiede ulteriori considerazioni quando si connetta col normale svolgimento degli affari di un Istituto di assicurazioni.

Correzioni alla Nota precedente: Al denominatore della seconda delle formole (15) togliere il fattore $\frac{1}{2}$; al denominatore del 2° membro della (25) sostituire 2^{s-1} a 2^s; a pag. 45 sostituire 10.000.000.000 a 1.000.000.000.

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali e le equazioni integro-differenziali correlative*. Nota di E. Daniele, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Risulta dalle ricerche del prof. Volterra sulle operazioni di composizione e sulle funzioni permutabili che ad ogni problema algebrico o differenziale, — la cui soluzione si ottenga con funzioni che siano, nell'intorno dell'origine, olomorfe, oppure presentino un punto di diramazione od un polo, oppure una singolarità logaritmica, — corrisponde, secondo una determinata regola, un problema integrale o integro-differenziale che si risolve con funzioni olomorfe in tutto il piano oppure dotate, tutt'al più, delle singolarità dianzi accennate. Queste ricerche hanno la loro base nel noto volume *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. IX-XIII, e trovano il loro completamento nella recente Memoria *Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione* (Mem. d. R. Acc. d. Lincei, ser. 5ª, vol. XI, fasc. 4°, 1916), dove sono definite, almeno per la composizione di 1ª specie, le potenze di composizione ad esponente qualunque, nonchè i logaritmi di composizione.

Consideriamo per semplicità un'equazione differenziale ordinaria:

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{F}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 .$$

L'equazione integro-differenziale ad essa correlativa si ottiene nel modo seguente: scriviamo hx in luogo di x, e $\frac{y}{k}$ in luogo di y, essendo h e k due parametri indipendenti da x; la (A) diventa

$$\mathrm{F}\left(hx\,,\frac{y}{k}\,,\frac{y'}{hk}\,,\ldots\,,\frac{y^{(n)}}{hk^n}\right)=0\,,$$

ossia, riducendo a forma intera col moltiplicare per convenienti potenze di h e di k:

$$\Phi(x|h\,,k|y\,,y'\,,\ldots\,,y^{(n)})=0\,;$$

dopo ciò sostituiamo ad h e k due funzioni $\varphi(\lambda\mu)$ e $\psi(\lambda\mu)$ delle due nuove variabili λ e μ, permutabili fra di loro, e interpretiamo i prodotti e le potenze di $\varphi\,,\psi\,,y\,,y'\,,\ldots\,,y^{(n)}$ come delle composizioni. L'ultima equazione si muta così in un'equazione integro-differenziale, cioè (per limitarci alla composizione di 1ª specie):

$$\text{(B)} \qquad \Phi(x|\overset{*}{\varphi}\,,\overset{*}{\psi}|\overset{*}{y}\,,\overset{*}{y}'\,,\ldots\,,\overset{*}{y}^{(n)})=0\,,$$

e se la (A) ammette una soluzione

$$y=f(x)$$

il cui comportamento nell'intorno dell'origine sia quello indicato dianzi, se ne deduce per la (B) la soluzione

$$y(x|\lambda\,,\mu)=\overset{*}{\psi}\,\overset{*}{f}(x\overset{*}{\varphi})\,,$$

la quale si costruirà, qualora $f(x)$ non sia olomorfa, mediante funzioni di λ e μ non più di *ordine* intero e positivo.

2. Vi sono però delle equazioni differenziali che apparentemente sfuggono al principio generale di dare luogo, attraverso alla regola di Volterra, ad un'equazione integro-differenziale correlativa. Tale è, per esempio, l'equazione

$$(a) \qquad xy'+y=0\,.$$

Se difatti scriviamo hx in luogo di x, e $\frac{y}{k}$ in luogo di y, sparisce, dopo averla moltiplicata per k, ogni traccia dei parametri h e k.

Anche fra le equazioni a derivate parziali si trovano facilmente analoghi esempi. Così l'equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{a}{v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{b}{u}\frac{\partial\theta}{\partial v}\,,$$

con a e b costanti, non si altera quando si sostituisca $h_1 u$ ad u, $h_2 v$ a v, e $\frac{\theta}{k}$ a θ.

Limitandoci alle equazioni differenziali ordinarie (l'estensione alle equazioni alle derivate parziali non presenta difficoltà) cominceremo col caratterizzare la forma che spetta al primo membro della (A) nell'ipotesi che l'equazione manchi, come accade per la (a), di equazione integro-differenziale correlativa. Vedremo poi successivamente come questo difetto non sia, per così dire, che apparente, potendosi dare, con una trasformazione semplicissima, alle equazioni in discorso una forma tale da farle rientrare nella regola generale.

3. La più generale equazione differenziale ordinaria di ordine n si può scrivere nel modo seguente:

$$\text{(1)}\qquad F(x\,,y\,,y'\,,\dots\,,y^{(n)}) \equiv \sum C(x)\, y^i (y')^{i_1} (y'')^{i_2} \dots (y^{(n)})^{i_n} = 0\,,$$

dove $i\, i_1 \dots i_n$ sono dei numeri interi, positivi o nulli, e $C(x)$ è una funzione qualunque di x. Facciamo la sostituzione

$$\text{(2)}\qquad x = h\xi \quad , \quad y = \frac{\eta}{k}\,;$$

il termine generale della (1) diventa:

$$\Gamma(\xi)\, \frac{\eta^i (\eta')^{i_1} (\eta'')^{i_2} \dots (\eta^{(n)})^{i_n}}{h^p\, k^q}\,,$$

avendo posto:

$$\Gamma(\xi) = C(h\xi)$$
$$p = i_1 + 2i_2 + \cdots + n i_n$$
$$q = i + i_1 + i_2 + \cdots + i_n\,,$$

e rappresentando con $\eta'\, \eta'' \dots$ derivate rispetto a ξ.

Con ciò ogni termine di F riceve intanto un fattore

$$\frac{1}{h^p\, k^q}\,,$$

diverso, naturalmente, da termine a termine.

Scriviamo ora la (1) in modo che in un suo termine si abbia $C(x) = 1$; dividiamo cioè tutta l'equazione per uno qualunque dei coefficienti C, e indichiamo con P e Q i valori di p e q in quel termine in cui $C = 1$. In virtù della sostituzione (2) questo termine si altera esattamente pel fattore

$$\frac{1}{h^P\, k^Q}\,.$$

Partiamo ora dall'ipotesi che questa sostituzione debba lasciare invariata la (1). Ciò significa che in seguito alla sostituzione (2) il primo membro della (1), ossia F, potrà risultare moltiplicato tutt'al più per un fattore indipendente da $\eta', \dots, \eta^{(n)}$. Questo fattore dovrà comparire nei singoli termini di F, e proverrà, per ciascun termine, in parte dal fattore $C(x)$ ed in parte dall'altro fattore

$$Y = y^i (y')^{i_1} \dots (y^{(n)})^{i_n}.$$

Ma poichè vi è un termine, quello in cui p e q hanno i valori P e Q, che viene moltiplicato precisamente per $\frac{1}{h^P k^Q}$, tutti i rimanenti termini di F dovranno ricevere questo moltiplicatore; e poichè la parte Y si moltiplica per $\frac{1}{h^p k^q}$, così la parte residua $C(x)$ deve ricevere un fattore del medesimo tipo. Osservando infine che C è indipendente da y, ne risulta che dev'essere:

$$C(x) = \frac{c}{x^j},$$

dove c indica una costante qualunque, mentre j è un numero intero legato a p dalla relazione

$$p + j = P. \tag{3}$$

Quanto a q è chiaro che dovrà avere il medesimo valore in tutti i termini, cioè: $q = Q$.

L'equazione (1) prende dunque la forma

$$\sum \frac{c}{x^j} y^i (y')^{i_1} \dots (y^{(n)})^{i_n} = 0: \tag{4}$$

il suo primo membro è un polinomio omogeneo in $y, y', \dots, y^{(n)}$, e l'esponente j di $\frac{1}{x}$ si potrà sempre supporre positivo o nullo, e quindi per la (3) P indicherà il massimo valore di p. I coefficienti c non vanno soggetti ad alcuna restrizione.

4. Vogliasi p. es. costruire le equazioni del tipo (4) del 1° ordine. Dovremo porre $i_2 = \dots = i_n = 0$, e la (4) si riduce alla seguente:

$$x^n y'^n + c_1 x^{n-1} y y'^{n-1} + \dots + c_{n-1} x y^{n-1} y' + c_n y^n = 0; \tag{5}$$

essa si scinde in n (od in un numero minore) di equazioni lineari

$$xy' = \gamma y, \qquad (\gamma \text{ costante})$$

i cui integrali sono

$$y = \beta x^{\gamma}, \qquad (\beta \text{ cost. arbitraria}). \tag{6}$$

Un secondo esempio notevole ci viene fornito dalle equazioni lineari d'ordine n, che assumono la forma:

$$x^n y^{(n)} + c_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + c_{n-1} xy' + c_n y = 0. \tag{7}$$

È l'equazione di Cauchy, alla quale si soddisfa ponendo

$$y = x^{\alpha}, \tag{8}$$

e ricavando α dall'equazione (fondamentale)

$$\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) + c_1 \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 2) + \cdots$$
$$+ c_{n-1} \alpha + c_n = 0.$$

Se questa ha le radici tutte distinte, la (7) ammette n integrali distinti della forma (8); se invece ha r radici eguali ad α, accanto all'integrale (8) avremo gli altri

$$x^{\alpha} \lg x, \; x^{\alpha} \lg^2 x, \; \dots, \; x^{\alpha} \lg^{r-1} x. \tag{8'}$$

Tanto la (6) quanto le (8) e (8′), che forniscono rispettivamente gli integrali della (5) e della (7), contengono delle funzioni alle quali corrispondono, nella teoria della composizione, delle funzioni o delle operazioni aventi un significato preciso; queste nuove espressioni non si saprebbero tuttavia considerare come soluzioni di equazioni integro-differenziali correlative alle equazioni differenziali (5) e (7).

5. Trasformiamo la (4) col porre: $x = e^{\xi}$. Poichè la (4) è omogenea rispetto ad $y, y', \dots, y^{(n)}$, e pel modo come contiene x, il primo membro si riduce al prodotto di $e^{-p\xi}$ per un polinomio omogeneo in $y, y', \dots, y^{(n)}$ a coefficienti costanti, rappresentando con $y'\, y'' \dots$ derivate rispetto a ξ. Indicando allora con

$$\Phi(y\, y' \dots y^{(n)})$$

un tale polinomio, l'equazione trasformata si scrive:

$$\Phi(y\, y' \dots y^{(n)}) = 0. \tag{9}$$

Ora questa equazione si trova nelle condizioni volute per dare luogo, attraverso alla regola di Volterra, all'equazione integro-differenziale correlativa. Difatti la sostituzione (2) la muta in un'equazione del medesimo tipo, dalla quale si staccherà per conseguenza il fattore $\frac{1}{k^{q}}$ (e quindi non rimarrà traccia del parametro k, non essenziale del resto), mentre in ogni termine comparirà come fattore una certa potenza di h, diversa generalmente da termine a termine.

In conclusione, all'equazione (4) si può associare un'equazione integro-differenziale correlativa, purchè si eseguisca su x e y, invece della sostituzione (2), l'altra:

$$x = e^{h\xi} \quad , \quad y = \eta \, . \tag{10}$$

Nell'equazione trasformata, il cui primo membro sarà un polinomio omogeno in $\eta, \eta', \dots, \eta^{(n)}$ a coefficienti costanti, i varî termini conterranno h a potenze differenti (che si potranno sempre supporre ad esponente positivo o nullo); non resta che porre in luogo di h una qualunque funzione ψ di due variabili λ e μ, e interpretare i prodotti e le potenze di $\psi, \eta, \eta', \dots, \eta^{(n)}$ come composizioni.

6. Applicando questo procedimento all'equazione differenziale (7), la sostituzione (10) la trasforma nell'equazione a coefficienti costanti $\gamma_1 \gamma_2 \dots$:

$$y^{(n)} + \gamma_1 h y^{(n-1)} + \cdots + \gamma_{n-1} h^{n-1} y' + \gamma_n h^n y = 0 , \tag{11}$$

da cui si deduce l'equazione integro-differenziale

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \gamma_1 \overset{*}{\psi}(\lambda\mu) \, \overset{*}{y}{}^{(n-1)}(\xi | \lambda\mu) + \cdots \\ + \gamma_{n-1} \overset{*}{\psi}{}^{n-1}(\lambda\mu) \, \overset{*}{y}{}'(\xi | \lambda\mu) + \gamma_n \overset{*}{\psi}{}^n(\lambda\mu) \, \overset{*}{y}(\xi | \lambda\mu) = 0 \, . \end{aligned} \tag{12}$$

Agli integrali della (7) del tipo

$$y = x^\alpha \tag{13}$$

oppure

$$y = x^\alpha \lg^r x \tag{13'}$$

corrispondono gli integrali della (11)

$$y = e^{h\alpha\xi} \quad , \quad y = h^r \xi^r e^{h\alpha\xi} ,$$

e quindi le soluzioni della (12):

$$y(\xi | \lambda\mu) = 1 + \alpha\xi\psi(\lambda\mu) + \frac{1}{2!} \alpha^2 \xi^2 \overset{*}{\psi}{}^2(\lambda\mu) + \cdots$$

$$y(\quad) = \xi^r \overset{*}{\psi}{}^r(\lambda\mu) + \alpha \xi^{r+1} \overset{*}{\psi}{}^{r+1} + \frac{1}{2!} \alpha^2 \xi^{r+2} \overset{*}{\psi}{}^{r+2} + \cdots$$

Questi sviluppi sono convergenti in tutto il piano, e rappresentano funzioni di λ e μ permutabili con ψ: s'intende che per il primo sviluppo, che non è nullo per $\xi = 0$, la composizione dovrà essere definita nel senso specificato a pag. 138 delle *Leçons sur les fonctions de lignes*.

È da segnalare il fatto che, partendo dall'equazione differenziale (7) e da un suo integrale (13) o (13'), in generale non olomorfo, si perviene, attraverso alla sostituzione (10), ad un'equazione integro-differenziale correlativa, le cui soluzioni corrispondenti a quegli integrali sono sempre olomorfe in tutto il piano.

7. Passando in generale all'equazione differenziale (4), notiamo in primo luogo ch'essa ammette sempre, al pari della (7), degli integrali della forma (13), e sotto certe condizioni, cui debbono soddisfare i suoi coefficienti, ammette pure degli integrali della forma (13'). Consideriamo più generalmente quegli integrali che presentano, intorno all'origine, lo sviluppo

$$y = x^\alpha \lg^r x\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)\,, \tag{14}$$

dove α indichi un numero qualunque ed r un intero positivo o nullo. La sostituzione

$$x = e^{h\xi}$$

trasforma la (4) in un'equazione

$$\Phi(y\, y' \ldots y^{(n)} | h) = 0$$

in cui la ξ non figura esplicitamente, e per la quale lo sviluppo (14) diventa:

$$y = h^r\,\xi^r\,e^{h\alpha\xi}(a_0 + a_1 e^{h\xi} + a_2 e^{2h\xi} + \cdots)\,. \tag{15}$$

Ora la serie

$$a_0 + a_1 x + \cdots$$

è convergente in un certo cerchio col centro nell'origine; ne segue che la serie

$$a_0 + a_1 e^{h\xi} + a_2 e^{2h\xi} + \cdots \tag{16}$$

sarà convergente in tutto un campo infinito limitato da una retta parallela all'asse delle ordinate ed estendentesi nel senso delle ascisse negative.

La (15) dà quindi, col sostituire agli esponenziali i loro sviluppi in serie di potenze e ad h una funzione $\psi(\lambda\mu)$, e interpretando al solito le potenze di ψ come composizioni, una serie convergente in tutto il piano, soluzione dell'equazione integro-differenziale che possiamo ora chiamare correlativa della (4). Si potrà sempre dire che questa soluzione è permutabile con la funzione $\psi(\lambda\mu)$: soltanto bisognerà osservare, quando $r = 0$, che se il campo di convergenza della serie (16) non comprende il punto $\xi = 0$, allora si dovrà assumere la composizione nel senso più ampio come già si specificò nel caso particolare esaminato al n. 6.