ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Storia della Matematica. — *Sur les nombres infinis de Fontenelle.* Nota del prof. BRANISLAV PETRONIEVICS, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Le premier essai d'une théorie rationnelle des nombres infinis a été fait par B. Fontenelle dans ses *Éléments de la Géometrie de l'Infini* (1). Que cette théorie soit pleine de contradictions, la critique l'a bientôt relevé (2). Mais qu'elle posséde une valeur historique incontestable, comparée avec les deux théories modernes des nombres infinis, celle de M. Cantor et celle de M. Veronese, c'est ce que je me propose de montrer dans cette Note.

Comme on le sait, les deux théories modernes ont des points de départ tout à fait différents. Tandis que la théorie de Cantor procéde arithmétiquement en partant des nombres finis et en définissant ω, le premier nombre infini, comme nombre de tous les nombres finis (3), celle de Veronese procéde géométriquement, en définissant le nombre infini de premier ordre ∞ comme nombre de segments égaux à l'unité (AB) d'un segment de droite infini (AA^{∞}), qui peut être divisé en un nombre fini de parties infinies (4).

(1) Fontenelle B., *Élements de la Géométrie de l'Infini*, Paris, MDCCXXVII.

(2) Mac Laurin, *Treatise on the Theory of Fluxions*, Introduction, trad. franç., MDCCXLIX, t. I, p. XLI-XLVI. — Card. G. S. Gerdil, *Opere edite ed inedite*, Roma, MDCCCVI, t. IV. p. 261-286 (« Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence eternelle de la matière et du mouvement, déduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes, soit permanens, soit successifs »; cet essai a été imprimé pour la première fois à Paris 1760; la critique de Fontenelle y est contenue dans § 1 et 2, p. 263-276). — Achard F., *Reflexions sur l'infini mathématique*, dans Mémoires de l'Académie royale, Berlin 1745, p. 143-154 (cité par Veronese, *Fondamenti di Geometria*, p. 620).

(3) Cantor distingue parmi les nombres transfinis deux sortes de nombres: nombres ordinaux et nombres cardinaux, en definissant les premiers comme types d'ordre des ensembles bien ordonnés et les seconds comme résultats de double abstraction de la qualité et de l'ordre des éléments dans les ensembles (comp. G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen, Bd. 46, p. 481 et Bd. 49, p. 216). Tandis que à chaque nombre ordinal fini correspond un nombre cardinal fini, il y a une infinité de nombres transfinis ordinaux, appartenant tous à la même classe, qui correspondent au même nombre cardinal transfini (l. c., Bd. 49, p. 220).

(4) Comp. G. Veronese, *Fondamenti di Geometria*, Padova. 1891 Ip. III et IV, p. 84, 92 et Def. II, § 86, p. 97. — M. Veronese, pour introduire ses nombres infinis et infiniments petits, part de la définition du système linéaire homogène, tel que étant donné un de ses élements quelconques il existe dans le système deux segments égaux à un segment donné quelconque, qui ont respectivement le second et le premier extrême dans l'élément

Veronese veut établir, qu'il ny a aucun point de la ligne droite infinie, qui puisse correspondre au nombre ω de Cantor, c'est à dire que, selon lui, l'application géometrique des nombres transfinis de Cantor n'est pas possible (1). Mais la différence la plus essentielle des deux théories, c'est le critère de l'égalité des ensembles infinis, en tant que ces ensembles forment la base des nombres infinis, leurs types d'ordre.

D'après Cantor, ce critère consiste dans la correspondance univoque (ou biunivoque) des nombres de deux ensembles, tandis que, d'après Veronese, c'est la possession d'éléments qualitativement égaux qui, outre la correspondance, determine l'égalité de deux ensembles infinis (2).

La théorie de Fontenelle a le même point de départ que celle de Cantor. « Pour mieux concevoir l'Infini, je considère la suite naturelle des nombres, dont l'origine est 0 ou 1. Chaque terme croit toujours d'une unité, & je vois que cette augmentation est sans fin, & que quelque grand que soit le nombre où je serai arrivé, je n'en suis pas plus proche de la fin de la suite, ce qui est un caractère qui ne peut convenir à une suite dont le nombre des termes serait fini. Donc la Suite naturelle a un nombre de termes infini (Fontenelle, op. c., p. 29) (3). Mais tandis que d'après Cantor

---

donné; sans qu'il subsiste entre deux segments quelconques a et b du système l'axiome d'Archimède, c'est à dire l'axiome que si $a < b$ il y a un nombre entier fini n tel que $a . n > b$.

(1) Comp. Veronese, op. c., § 90, p. 102-106.

(2) D'après Cantor deux ensembles sont « semblables » (ähnlich), quand on peut établir une correspondance univoque de leurs éléments d'après leur ordre (l. c., Bd. 46, p. 497 s.). « Égaux ou équivalents » (aequivalent) sont des ensembles, quand on peut établir une correspondance univoque de leurs éléments (ib., p. 482).

Quand on veut établir l'égalité de deux ensembles infinis, il ne suffit pas, d'après Veronese, qu'il y ait une correspondance univoque entre leurs éléments, il faut qu'il y ait en outre identité qualitative de ces éléments. Veronese attribue aux éléments des ensembles trois propriétés différentes: 1. la position, 2. la qualité et 3. l'ordre (op. c., Def. I, § 38, p. 15). La qualité des éléments servant de base à la différence entre le tout et la partie (Def. II, § 27, p. 9), le nombre ordinal est défini alors par Veronese comme type d'ordre d'un ensemble ordonné, où l'on a fait uniquement abstraction de la position des éléments, la relation de partie et du tout et la relation de l'ordre étant conservées (op. c., Def. II, § 45, p. 26). Fait-on abstraction de la relation de partie et du tout, on a le nombre ordinal de Cantor, et si l'on va enfin jusqu'à faire abstraction aussi de l'ordre, on parvient au nombre cardinal de Cantor. Veronese ne conteste donc point la valeur logique des nombres de Cantor, il les tient seulement pour des notions purement arithmétiques incapables d'être appliqués à la ligne droite (comp. aussi son article *Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali*, Math. Annalen, Bd. 47. p. 426 f.).

(3) Que Fontenelle ait clairement conçu le nombre ω, cela est confirmé encore mieux par les mots suivants, qui, dans son texte, viennent immédiatement après les mots cités dans le nôtre:

« En vain dirait-on que le nombre des termes qui la compose est toujours actuellement le nombre ω se trouve *hors* de la suite naturelle des nombres finis (¹), le nombre infini de tous les nombres finis se trouve d'après Fontenelle dans cette suite même comme son dernier terme (²), Tandis que d'après Cantor $1 + \omega = \omega$, mais $\omega + 1 > \omega$, on a en général d'après Fontenelle, qui ne distingue pas cas deux cas, $\infty + a = \infty$, mais $\infty + \infty = 2\infty$ (³). Tandis que d'après Canjor il y a deux principes de formation des nombres transfinis, il n'en existe chez Fontenelle qu'un seul, le principe des séries des nombres infinis correspondant à la suite naturelle de nombres finis (⁴).

---

fini, mais que je le puis toujours augmenter. Il est bien vrai que le nombre des termes que je puis actuellement parcourir ou arranger selon leur ordre, est toujours fini, mais le nombre des termes dont la suite est composée en elle-même, est autre chose. Les termes dont elle est composée en elle-même existent tous également, et si je la conçois poussée seulement jusqu'à 100, je ne donne pas à ces 100 termes une existence dont soient privés tous ceux qui sont par de-là. Donc tous les termes de la suite, quoique-qu'ils ne puissent pas être embrassés ou considérés ensemble par mon esprit, sont également réels. Or le nombre en est infini, comme on vient de le prouver, donc un nombre infini existe aussi réellement que les nombres finis » (op. c., § 84, p. 29 et s.).

Veronese reconnait aussi Fontenelle pour un des précurseurs de l'idée du nombre ω; mais il trouve que Gerdil, un de critiques de Fontenelle (comp. remarque 2), l'aurait conçu mieux que Fontenelle (Veronese, op. c., p. 620). Cependant, si l'on compare le texte de Gerdil cité par Veronese (p. 620 s.) avec le texte de Fontenelle, ici comuniqué in extenso, on ne peut pas partager cette opinion.

(¹) D'après Cantor le nombre ω est un nombre limite (« eine Grenzzahl »), qui n'est precedé par aucun nombre plus petit (l. c., Bd. 49, p. 226 et 231; comp. aussi son article *Mittheilungen zur Lehre vom Transfiniten*, dans Zeitschrift für Philosophie, vol. 91, p. 84).

(²) « Dans la suite naturelle chaque terme est égal au nombre des termes qui sont depuis 1 jusqu'à lui inclusivement. Donc puisque le nombre de tous ses termes est infini, elle a un dernier terme qui est ce même infini.

« On l'exprime par ce caractère ∞.

« Il ne faut point que le mot de *dernier terme* effraye en cette matière. C'est un dernier terme fini que la suite naturelle n'a point, mais n'en avoir point de dernier fini, ou en avoir un dernier infini, c'est la même chose » (Fontenelle, op. c., p. 30).

(³) « ∞ ne peut plus être augmenté par les grandeurs qui l'avaient augmenté jusque-là, car il a reçu d'elles tout ce qu'il pouvait recevoir d'augmentation. Et si a n'augment pas ∞, il ne le diminue pas non plus quand il en est retranché. Donc $\infty \pm a = \infty$ » (Fontenelle, op. c., pag. 31).

« — — ∞, qui est 1 devenue infini par une augmentation sans fin, ou une grandeur fini qui est sortie de l'*ordre* du fini, & a passé dans celui de l'infini, ne peut plus être augmenté par tout ce qui est de l'ordre du fini dont elle n'est plus, mais seulement par ce qui est de l'ordre de l'infini, dont elle a commencé d'être » (ib., p. 32).

(⁴) Comp. Cantor, l. c., Bd. 49, p. 223, 221 et 226. Le premier principe de production des nombres transfinis consiste dans l'addition de 1 à un nombre précédant, et le deuxième dans la position d'un nouveau nombre (nombre limite) d'après la formule $\alpha = \mathrm{Lim}_\nu\, \alpha_\nu$, les nombres α_ν représentant une « série fondamentale » (Fundamentalreihe) et la série fondamentale étant une série de type ω (l. c., Bd. 46, p. 508).

Le principe de production des nombres infinis est exprimé par Fontenelle dans des termes suivants.

« Il suit & de tout ce qui a été dit, & de la nature de la chose, que ∞ étant gran-

Comme on le voit, autant par son point de départ que par la manière d'après laquelle sont deduits les nombres infinis supérieurs, la théorie de Fontenelle se rapproche sensiblement de celle de M. Cantor. Mais les ressemblances avec la théorie de M. Veronese ne sont pas moins grandes. En mettant le nombre ω dans la série des nombres naturels comme son dernier terme, Fontenelle admet la divisibilité de son nombre ∞ en parties égaux, c'est à dire les nombres infinis de la forme $\frac{\infty}{n}$ (1), comme Veronese admet de tels nombres d'après la définition même de son nombre ∞. Mais tandis que Veronese admet, d'après son principe d'égalité des ensembles infinis, des nombres de la forme $\infty - n$ et $\infty + n$, Fontenelle, comme nous l'avons déjà vu, n'admet point de tels nombres. La différence est encore plus grande quant à la production des nombres infinis des ordres supérieurs. Tandis que d'après Fontenelle, comme nous l'avons vu, ces nombres sont produits d'après un principe analogue au deuxième principe de Cantor, Veronese deduit ces nombres en appliquant le principe, qui lui permet d'obtenir son nombre infini de premier ordre, un nombre fini (les infinis d'ordre fini), ou un nombre infini de fois (les infinis d'ordre infini) (2).

Mais les deux théories ont de commun, par opposition à celle de Cantor (3), la supposition de nombres infiniment petits, quoique la manière de déduire ces nombres soit bien différente chez eux deux. Fontenelle en déduit la necessité, en partant de la suite des fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc. qui

---

deur, est susceptible d'augmentation, pourvu que les grandeurs que l'on concevra l'augmenter soient grandeurs par rapport à lui, c'est à dire infinies. Ainsi l'on peut concevoir cette nouvelle suite $\infty, 2\infty, 3\infty$, &c qui sera une progression arithmétique, dont la difference sera ∞, & comme la difference de 1 à ∞ ou $\infty - 1$ est $= \infty$, cette progression pourra commencer par 1, & on aura $\div\ 1\infty, 2\infty, 3\infty$, &c.

« Puisque dans cette nouvelle progression les coëfficients de ∞ croissent toujours selon la suite des nombres naturelles, elle se terminera enfin par $\infty \times \infty = \infty^2$ » (op. c., p. 33).

En élevant la progression $1, \infty, \infty^2, \infty^3, \ldots \infty^{\infty}$ au carré, cube. etc. ∞, on arrive d'après Fontenelle (p. 40) à la progression: $1^{\infty}, \infty^{\infty}, \infty^{2\infty}, \infty^{3\infty}, \ldots \infty^{\infty^2}$, et en appliquant le même procedé à cette progression, à la progression dont le dernier terme sera ∞^{∞^3}.

« Il est visible. que ces élévation n'ont point du fin, qu'on irait jusqu'à une progression dont le dernier terme serait $\infty^{\infty^{\infty}}$, & que là même on recommencerait encore à faire des élévations sans fin » (op. c., p. 40).

(1) La divisibilité de ∞ par n, nombre fini, est déduite par Fontenelle de la propriété générale d'une grandeur d'être divisible. (Comp. op. c., § 93, p. 32 et § 133, p. 41).

(2) Veronese, op. c., Def. II, § 86, p. 97 et hyp. V, p. 106.

(3) Cantor s'est déclaré expressement contre la possibilité des nombres infiniment petits. Comp. son article cité dans Zeitschrift für Philosophie, vol. 91, p. 112 s.

doit d'après lui se terminer par un $\frac{1}{\infty}$, l'infiniment petit de premier ordre [1]. Les infiniments petits des ordres supérieurs se déduisent par divisions successives de $\frac{1}{\infty}$ par ∞, de $\frac{1}{\infty^2}$ par ∞ etc. [2]. Veronese y arrive en supposant que, un segment fini pouvant devenir indéfiniment petit, il y aura un point hors du champs de cette variabilité de telle sorte, que ce point-limite delimitera avec le point initial un segment infiniment petit, par rapport auquel le segment donné fini sera un infini de premier ordre [3]. De la même manière, on peut supposer un infiniment petit de second ordre dans l'infiniment petit de premier ordre, et ainsi de suite [4].

Mais le point de ressemblance le plus important entre les deux théories se trouve dans la complète applicabilité, reconnues par eux, de nombres infiniment grands et infiniment petits à la ligne droite [5].

(1) « 1 étant pris pour représenter en général la grandeur finie, plus le nombre par lequel je le divise est grand, plus je le diminue, de sorte que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c sont des grandeurs toujours décroissantes. Donc à la fin $\frac{1}{\infty}$ sera une grandeur infiniment petite, ou, ce qui est la même chose, ... une partie *infinitième* du Fini, comme 1 est une partie infinitième de ∞ » (Fontenelle, op. c., p. 116).

Que cette déduction de l'infinimeat petit soit tout à fait erronée, on peut l'entrevoir aisément. Le nombse ω est posé par la réalisation de tous les nombres finis, parce qu'il représente le type d'ordre de cet ensemble. Mais le nombre $\frac{1}{\omega}$ n'est point posé par la réalisation de tous les fractions finies $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{\omega}$ ne se trouvant par définition parmi les membres de cette série, et n'étant point posé immédiatement par sa réalisation, comme l'est le nombre ω par la réalisation de la série $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$. Cantor a donc eut raison de n'admettre pas d'infiniment petits dans sa théorie; et la déduction de l'infiniment petit par Veronese est la seule qu'on puisse regarder comme rationelle (et formellement admissible).

(2) « Donc $\frac{1}{\infty}$ peut être encore infiniment divisé, ce qui donnera $\frac{1}{\infty^2}$, partie infinitième de $\frac{1}{\infty}$ ...; et comme cela n'a point de fin, on aura $1 \cdot \frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty^2} \cdot \frac{1}{\infty^3} \cdot \frac{1}{\infty^4} \cdot \cdot$ &c $\frac{1}{\infty^\infty}$, c'est-à-dire, autant d'ordres de Infiniments petits qui s'abaisseront au dessous de 1, que l'on a vu d'ordres d'Infinis qui s'élevaient à l'infini au dessus de 1 » (Fontenelle, op. c., p. 117).

(3) Comp. Veronese, op. c., Ip. VI, p. 128, prop. *a* § 96, p. 129, prop. *d* § 97, p. 131.

(4) Veronese, op. c., Ip. VII, p. 147 et prop. *e*, § 100, p. 148.

Mr. Levi-Civita, qui a faite une exposition purement analytique des nombres infinis et infiniments petits de Mr. Veronese (Atti R. Istituto Veneto, 1892: *Infiniti e Infinitesimi attuali*) en confirmant ainsi la validité mathématique de la théorie, a donnée une importante extension de cette théorie par l'introduction des infinis et infiniment petits d'ordres rationnels quelconques.

(5) Fontenelle, op. c., p. 245: « Il n'y a point de nombre qui ne puisse exprimer

A cette comparaison des trois théories de nombres infinis, je veux ajouter encore quelques remarques critiques touchant la valeur de la théorie de Fontenelle.

Comme nous l'avons vu, le nombre ∞ de Fontenelle veut être et le type d'ordre d'ensemble arithmétique des nombres finis sans dernier terme et te type d'ordre des segments finis égaux d'une ligne droite infinie avec un point à l'infinì, c'est qui est contradictoire.

Mais nous ne devons pas nous étonner de cette confusion des points de vue arithmétique et géométrique dans la conception principale de la théorie de Fontenelle: cette théorie appartient à l'âge d'élaboration du calcul infinitésimal, qui dans son développement initial s'inspirait aussi bien de motifs arithmétiques que de motifs géométriques.

C'est par cette confusion de motifs arithmétiques et géométriques qu'on peut expliquer aussi les autres contradictions, qut se trouvent dans la théorie de Fontenelle. La contradiction formelle du nombre ∞, dernier terme de la suite naturelle des nombres, a pour conséquence immédiate une autre contradiction: si ∞ est le dernier terme de la suite naturelle des nombres, il dévrait être précédé immédiatement par un nombre fini. Fontenelle s'aperçoit de cette contradiction, mais il cherche à l'éviter en supposant, que ∞ est divisible par n, n étant un nombre fini quelconque (op. c., p. 59). Mais en poursuivant la recherche des propriétés de la suite A (par A Fontenelle désigne la suite des nombres naturels avec son dernier terme ∞), Fontenelle tombe dans la même contradiction, qu'il a voulu et su eviter. En comparant les deux suites:

$$1\,,2\,,3\,,4\;\;,\ldots.\;\infty$$
$$1\,,4\,,9\,,16\,,\ldots.\;\infty^2\,.$$

la deuxième représentant l'élévation au carré de la première, et en les représentant par des lignes droites supposées infinies, Fontenelle, sans motiver

quelque Ligne droite, ni réciproquement de Ligne droite qui ne puisse être exprimée par quelque nombre... Donc à tous les nombres infiniment grands ou petits répondent des lignes possibles infiniment grands ou petits ».

Chez Veronese l'applicabilité des nombres infinis et infinitésimaux résulte immédiatement de l'origine même de ces nombres (comp. op. c., prefazione, p. XXV-XXVI).

Cantor s'est occupé très peu de la question de cette applicabilité. Nous trouvons seulement un passage dans ses écrits, où il touche cette question, en attribuant à la ligne droite un point à l'infini correspondant à son nombre ω (comp. son article cité dans Zeitschrift für Philosophie, vol. 91, p. 103 s.). Sur l'impossibilité formelle de cette application géométrique des nombres cantoriens comp. mon opuscule *Die typischen Geometrien und das Unendliche*, Heidelberg. 1907, p. 31-48.

suffisamment la nécessité d'un tel passage, admet un passage immédiat du Fini à l'Infini dans les deux séries, et, ce passage étant plus proche du commencement dans la deuxième série, il admet aussi l'étrange thèse d'un nombre fini devenant infini par l'élévation au carré. La gravité de cette conséquence, qui manifeste une contradiction éclatante, est reconnue par Fontenelle même, mais il s'efforce de l'atténuer en distinguant les nombres finis indéterminables des nombres finis fixes, qui appartiennent au commencement de la suite naturelle (¹). Il dit aussi que « le paradoxe admis ne conduit jamais à aucune conclusion fausse » (p. 66). Mais une théorie, qui peut admettre de pareilles contradictions comme principes de déductions logiques, ne mérite, même si elle appartient à la Mathématique de l'Infini, d'être poursuivie dans ses détails, son paradoxe suprême étant sa sentence de mort.

Reste sa valeur historique. Comme on le voit par ce qui précède, la théorie de Fontenelle peut être regardée comme la souche commune des deux théories divergentes de Cantor et de Veronese, et il sérait intéressant de savoir, si et dans quelle mésure les deux créateures des nouvelles théories se sont inspirés, au moins négativement, de l'ancienne. Ce qui est hors de doute, c'est qu'elle a été connue par tous les deux, car îls la citent, en répoussant également ses conséquences. En critiquant la théorie de son rival et en rapprochant par trop la théorie de celui-ci de la théorie de Fontenelle, Cantor s'exprime, d'après sa manière un peu violente, en disant que les nombres de Veronese possédent une similitude frappante (auffallende Aehnlichkeit) « mit den höchst absurden ‘ unendlichen Zahlen ’ Fontenelle's in dessen *Géométrie de l'Infini* » (²). En répondant à la critique injuste de Cantor, Veronese se défend de la similitude imputée de ses nombres avec ceux de Fontenelle, qu'il rejétte également (³). Mais il n'est pas impossible

(¹) « J'avoue que du premier coup d'oeil cette difficulté est accablante, et elle m'aurait fait abandonner tout ce Système de l'Infini, si je n'avais vu un grand nombre de fortes raisons qui la diminuoient ... » (Fontenelle, op. c., p. 64).

Parmi ces raisons la plus importante est celle de la différence entre les finis fixes et les finis indéterminables, qui est établie par Fontenelle de la manière suivante. « Il y a bien de la différence entre le Fini *fixe*, pour ainsi dire. & le Fini *en mouvement*, ou, comme disent nos habiles Voisins, *en fluxion*, pour devenir Infini » (op. c., p. 65).

« J'appelle *Finis indeterminables* les termes finis de A qui deviennent infinis dans A^2 par l'élévation au quarré ... » (op. c., p. 67).

(²) Comp. Cantor, l. c., Bd. 46, p. 501.

(³) « Egli (Cantor) afferma la ‘Uebereinstimmung’ dei miei infiniti e infinitesimi cogli ‘höchst absurden’ numeri infiniti di Fontenelle. Io conosco perfettamente questi infiniti e le censure che li hanno distrutti, ed è per ciò che nell'appendice del libro mi limitai ad accennare a quelle critiche ed a dichiarare che la teoria di Fontenelle non è da confondersi colla mia » (comp. G. Veronese, Mathematische Annalen, Bd. 47, p. 424 s. et son livre *Fondamenti di Geometria*, Appendice, p. 620, trad. allemande, p. 698).

de supposer, vu les similitudes subsistantes, que Cantor comme Veronese soient parvenus à établir les principes de leurs théories en cherchant d'éviter les contradictions flagrantes dans lesquelles était tombée la théorie du célèbre académicien français.

Meccanica celeste. — *Sopra le distanze dei pianeti dal Sole.* Nota di G. Armellini, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

1. Mi permetto di partecipare all'Accademia alcune semplici considerazioni sopra le distanze planetarie.

2. Prescindendo da considerazioni teoriche che, nello stato attuale delle nostre cognizioni cosmogoniche, la scienza è obbligata a riguardare con qualche diffidenza, è noto che le leggi empiriche, le quali ci rappresentano le distanze dei pianeti dal Sole, possono tutte ridursi alla formola:

$$x_n = a + bc^n .$$

3. Così nella celebre legge di Bode o di Titius (¹) si pone $a = 0,4$; $b = 0,3$; $c = 2$. Per Mercurio abbiamo $n = -\infty$; per Venere $n = 0$ (vale a dire supponiamo implicitamente l'esistenza d'infiniti pianetini tra Mercurio e Venere), per la Terra $n = 1$ ecc., ottenendo in tal modo i seguenti valori:

Mercurio. . . .	0,4	Marte	1,6	Saturno . . ,	10,0
Venere	0,7	Asteroidi . . .	2,8	Urano	19,6
Terra	1,0	Giove	5,2	Nettuno . . .	38,8

Le vere distanze sono invece:

Mercurio . .	0,387	Marte	1,52	Urano	19,2
Venere . . .	0,723	Giove	5,20	Nettuno . . .	30,1
Terra	1,00	Saturno . . .	9,54		

Questo specchietto mostra, come del resto è notissimo, che la legge di Bode è assolutamente falsa per Nettuno dove l'errore è del 30 °/₀ (²).

(¹) Il vero inventore della legge è Titius (G. D. Tietz). Il Wurm cercò di perfezionarla prendendo

$$a = 0,397 \quad , \quad b = 0,301 \quad , \quad c = 2 ;$$

ma, mentre in tal modo si altera la bella semplicità della legge, l'errore per Nettuno è ancora *aumentato* ($d = 38,92$). Ciò spiega perchè la modificazione del Wurm non abbia attecchito.

(²) Non si dica che Urano e Nettuno appartengono alla così detta « *zona retrograda* ». Noi ora ci proponiamo di rappresentare *empiricamente* le distanze degli otto pianeti principali, prescindendo da ogni teoria cosmogonica; su ognuna delle quali, del resto, sussistono ancora moltissimi dubbi.