ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

de supposer, vu les similitudes subsistantes, que Cantor comme Veronese soient parvenus à établir les principes de leurs théories en cherchant d'éviter les contradictions flagrantes dans lesquelles était tombée la théorie du célèbre académicien français.

Meccanica celeste. — *Sopra le distanze dei pianeti dal Sole.* Nota di G. ARMELLINI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

1. Mi permetto di partecipare all'Accademia alcune semplici considerazioni sopra le distanze planetarie.

2. Prescindendo da considerazioni teoriche che, nello stato attuale delle nostre cognizioni cosmogoniche, la scienza è obbligata a riguardare con qualche diffidenza, è noto che le leggi empiriche, le quali ci rappresentano le distanze dei pianeti dal Sole, possono tutte ridursi alla formola:

$$x_n = a + b c^n .$$

3. Così nella celebre legge di Bode o di Titius [1] si pone $a = 0,4$; $b = 0,3$; $c = 2$. Per Mercurio abbiamo $n = -\infty$; per Venere $n = 0$ (vale a dire supponiamo implicitamente l'esistenza d'infiniti pianetini tra Mercurio e Venere), per la Terra $n = 1$ ecc., ottenendo in tal modo i seguenti valori:

Mercurio. . . .	0,4	Marte	1,6	Saturno . . ,	10,0
Venere	0,7	Asteroidi . . .	2,8	Urano	19,6
Terra	1,0	Giove	5,2	Nettuno . . .	38,8

Le vere distanze sono invece:

Mercurio . .	0,387	Marte	1,52	Urano	19,2
Venere . . .	0,723	Giove	5,20	Nettuno . . .	30,1
Terra	1,00	Saturno . . .	9,54		

Questo specchietto mostra, come del resto è notissimo, che la legge di Bode è assolutamente falsa per Nettuno dove l'errore è del 30 % [2].

[1] Il vero inventore della legge è Titius (G. D. Tietz). Il Wurm cercò di perfezionarla prendendo

$$a = 0,397 \quad , \quad b = 0,301 \quad , \quad c = 2 ;$$

ma, mentre in tal modo si altera la bella semplicità della legge, l'errore per Nettuno è ancora *aumentato* ($d = 38,92$). Ciò spiega perchè la modificazione del Wurm non abbia attecchito.

[2] Non si dica che Urano e Nettuno appartengono alla così detta «*zona retrograda*». Noi ora ci proponiamo di rappresentare *empiricamente* le distanze degli otto pianeti principali, prescindendo da ogni teoria cosmogonica; su ognuna delle quali, del resto, sussistono ancora moltissimi dubbi.

4. Più tardi L. Gaussin cercò una legge valida anche per Nettuno prendendo [1]:

$$a = 0 \qquad b = \frac{1}{214,45} \qquad c = 1,7226$$

Egli pone $n = 8$ per Mercurio (cioè ammette 7 pianeti intramercuriali), $n = 9$ per Venere e così di seguito, ottenendo in tal modo le distanze seguenti:

Mercurio . .	0,362	Marte . . .	1,848	Saturno . .	9,445
Venere . . .	0,623	Asteroidi . .	3,183	Urano . . .	16,269
Terra	1,073	Giove	5,483	Nettuno . .	28,025

La rappresentazione di Nettuno è migliorata in confronto di quella data dalla legge di Bode; ma per Urano, ed anche un po' per Giove e Marte, è peggiorata assai.

5. E. Belot [2] immaginando il sistema planetario nato dall' urto di due nebulose e servendosi di considerazioni matematiche, su cui ora non insistiamo, prende:

$$a = 0,28 \qquad b = \frac{1}{214,45} \qquad c = 1,883$$

Nella sua ipotesi Mercurio corrisponderebbe ad $n = 5$; Venere ad $n = 7$

(1) A differenza di Bode, Gaussin (e, dopo di lui, Belot) prende come unità di lunghezza il semidiametro solare invece della distanza media dalla Terra al Sole. Il numero $b = \frac{1}{214,45}$ nelle leggi di Gaussin e Belot esprime appunto il rapporto tra le due lunghezze. Non riusciamo però a comprendere quale relazione possa esistere tra il raggio *attuale* del Sole e le distanze dei pianeti. La Nota di Gaussin è intitolata: *Lois concernant la distribution des astres du système solaire*, C. R. 1880 I. pag. 518.

Il Gaussin ha dato anche la legge

$$x_n = 1,336 + 1,6425^n$$

per rappresentare i satelliti di Giove; però dopo la pubblicazione della sua Nota (1880) sono stati scoperti altri cinque satelliti. Istituendo il confronto, si ha il seguente specchietto:

Satellite	Distanza osservata	Distanza calcolata	Errore
V	2,53	2,19	13,4 %
VI	160,46	116,23	27,5 »
VII	164,46	190,9	16,1 »
VIII	329,3	313,5	4,8 »
IX	?	512,73	?

La mancanza di spazio c' impedisce di fare analoghe osservazioni per i satelliti degli altri pianeti.

(2) *Sur la loi de Bode et les inclinaisons des eq. planétaires* etc., C. R. 1905, II, pag. 937.

(cioè egli ammette 4 pianeti intramercuriali, ed un pianeta fra Mercurio e Venere); la Terra ad $n = 8$ ecc., ottenendo così le seguenti distanze:

Mercurio . .	0,390	Marte . . .	1.668	Saturno . .	9,546
Venere . . .	0,671	Asteroidi . .	2,893	Urano . . .	17,728
Terra	1,017	Giove	5,201	Nettuno . .	33,133

6. Ora io ho osservato che, *se invece di ammettere un gran numero di pianeti tra il Sole e Mercurio o tra Mercurio e Venere, si ammette un solo posto vacante tra Saturno ed Urano, diviene possibile di rappresentare le distanze planetarie con legge semplicissima e con notevolissima esattezza.*

7. È noto infatti che la distanza di Marte dal Sole è compresa tra 1,52 ed 1,53. Prendendola per eccesso avremo il numero 1,53. Ora io dico che la distanza di ogni pianeta dal Sole è data dalla formola:

$$x_n = \overline{1{,}53}^{\,n}\ ;$$

dove si ha $n = -2$ per Mercurio, $n = -1$ per Venere, $n = 0$ per la Terra, $n = 1$ per Marte ecc.

Si ha infatti, eseguendo i calcoli:

Mercurio . . .	$0{,}427 = \overline{1{,}53}^{-2}$	Giove	$5{,}48 = \overline{1{,}53}^{4}$
Venere	$0{,}654 = \overline{1{,}53}^{-1}$	Saturno	$8{,}38 = \overline{1{,}53}^{5}$
Terra	$1{,}00 = \overline{1{,}53}^{0}$	. . . .	
Marte	$1{,}53 = \overline{1{,}53}^{1}$	Urano	$19{,}46 = \overline{1{,}53}^{7}$
Asteroidi . .	$2{,}24 = \overline{1{,}53}^{2}$	Nettuno . . .	$29{,}76 = \overline{1{,}53}^{8}$
	$3{,}58 = \overline{1{,}53}^{3}$		

8. Possiamo paragonare tra loro le quattro leggi, calcolando l'errore medio, cioè la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati degli errori. Eseguendo i calcoli per gli otto grandi pianeti, abbiamo la seguente tabella:

Bode	errore medio	= 3,083
Gaussin	" "	= 1,37
Belot	" "	= 1,18
Armellini	" "	= 0,473

Tenendo presente la nota relazione che unisce l'errore medio alla misura di precisione abbiamo ancora:

Bode	misura di precisione	=	0,230
Gaussin . . .	" "	=	0,517
Belot	" "	=	0,601
Armellini. . .	" "	=	1,499

Occorre inoltre osservare che la mia legge è la *più semplice e non contiene alcun elemento estraneo* (*come il raggio solare nelle leggi di Gaussin e Belot*) *giacchè l'unico parametro che vi comparisce è il rapporto tra la distanza di Marte e quella della Terra. Il numero dei posti vacanti nella mia legge è il minimo. Infatti nella legge di Bode esso è infinito, in quella di Gaussin è uguale a 7, in quella di Belot a 5, e nella mia ad 1.* Sarà inutile far notare che i due valori 2,34 e 3,58 che si ottengono per gli asteroidi, sono compresi nei limiti della zona asteroidica ed anzi sono sufficientemente vicini ai limiti stessi.

9. Benchè, come già dicevo, la scienza sia costretta a riguardare con una certa diffidenza ogni tentativo di applicazione delle matematiche alle ricerche cosmogoniche, pure non sarà inutile aggiungere alcune considerazioni supplementari. Osserviamo dunque che:

a) Nelle quattro leggi comparisce sempre una progressione geometrica, sola o unita con altri termini. Ciò sembrerebbe dar ragione alle teorie del Poincarè (¹) il quale interpretava la legge di Bode ammettendo che i pianeti siano stati prodotti ad intervalli di tempo presso a poco costanti.

b) La nostra legge tenderebbe invece a indebolire alcune delle considerazioni teoriche da cui parte il Belot (²). Nel nostro caso si ha infatti $a = 0$. Ammettendo quindi l'origine vorticale del Belot, il raggio della nebulosa vorticale primitiva sarebbe stato trascurabile. Di più, secondo la teoria del Belot, il rapporto $\varrho = c : M^{1/3}$ (M = massa solare) dovrebbe essere poco differente dall'unità. Ed egli lo trova, infatti, eguale a 1,039. Nel nostro caso, invece, essendo $c = 1{,}53$, si avrebbe $\varrho = 0{,}84$.

c) Nulla può dirsi riguardo ai pianetini intramercuriali e a quelli supposti tra Mercurio e Venere. Gaussin suppone 7 pianetini intramercuriali; E. Belot, 4 intramercuriali ed 1 fra Mercurio e Venere; Bode infiniti pianetini fra Mercurio e Venere; noi non ne supponiamo nessuno. Come si vede, vi è pieno disaccordo tra le quattro leggi.

(¹) Poincarè. *Hypothèses cosmogoniques.*

(²) E. Belot, *Précisions nouvelles sur la loi exponentielle des distances des planètes et satellites,* C. R. 1916, II, pag. 564.

Non crediamo quindi di poter sottoscrivere alla teoria dello Charlier [1] il quale, fondandosi sulla sola legge di Bode, ammette tra Mercurio e Venere uno sciame di pianetini che suppone concentrato presso i centri di librazione, ai vertici del triangolo Lagrangiano.

d) Ancor meno può dirsi del posto vacante tra Saturno ed Urano. Può trattarsi di una pura coincidenza aritmetica, ma può anche ammettersi che ciò dipenda da un periodo di stasi dell'attività centrale. Infatti, secondo la teoria già citata del Poincaré, una maggior distanza tra i pianeti corrisponderebbe ad un maggior intervallo di tempo tra la loro produzione. Potrebbe anche mettersi in relazione questo ristagno dell'attività centrale con la produzione dei due pianeti giganti Giove e Saturno, od anche col passaggio dalla zona a rotazione diretta alla zona retrograda.

Nè sarebbe assurdo supporre l'esistenza di qualche pianetino tra Saturno ed Urano, ammettendo così che la zona dei due grandi pianeti, Giove e Saturno, sia contornata tanto all'interno (tra Giove e Marte) quanto all'esterno (tra Saturno ed Urano) da uno sciame di pianetini. La grande distanza ci avrebbe fino ad ora impedito di scoprire il secondo sciame. Per persuadersene supponiamo per es. che il pianetino Cerere venisse trasportato nel posto vacante indicato dalla nostra legge, cioè alla distanza 12,72. La sua lontananza dal Sole essendo aumentata nel rapporto 4,6, essa riceverebbe una quantità di luce $\overline{4,6}^2 = 21,16$ volte minore. Nell'opposizione la sua distanza dalla Terra sarebbe aumentata nel rapporto 6,6; quindi la quantità di luce che essa c'invierebbe sarebbe uguale ad $\dfrac{1}{21,16 \times \overline{6,6}^2}$ od $\dfrac{1}{921,72}$ della quantità che ora ci manda. Tenendo presente il rapporto fotometrico tra le grandezze stellari [2] risulterebbe che in tale ipotesi Cerere, quando è all'opposizione, cioè nelle migliori condizioni, brillerebbe come un astro di 15ª grandezza! Essa sarebbe quindi probabilmente sfuggita alle nostre ricerche. E si pensi che, nella maggior parte, i pianetini sono assai minori di Cerere!

10. Termineremo con un'osservazione, non fatta ancora da alcuno, sulla teoria del Belot.

Nella Nota citata [3] il Belot, supponendo, come ho detto, che sia avve-

(1) L. Charlier, *Das Bodesche Gesetz und die sogenannten intramercuriellen Planeten*. Astr. Nachr., Bd. 193, n. 4623. Sullo stesso argomento si consulti pure un bell'articolo del prof. V. Cerulli, *La legge di Bode e il preteso pianeta intramercuriale*, nella « Rivista di Astronomia e scienze affini », anno VII (1913).

(2) Chiamando con ϱ il rapporto fotometrico tra due grandezze stellari consecutive, si ha, come è notissimo: $\log \varrho = 0,4$; $\varrho = 2,512$.

(3) C. R. 1905, II. Non citiamo altre Note recentissime del Belot in C. R. non avendo attinenza con l'argomento.

nuto un urto tra una nebulosa verticale e una non verticale arriva all'equazione

$$\frac{dz}{dx} = \frac{V}{\varphi} \frac{1}{x - a} , \tag{1}$$

dove V e φ sono due funzioni su cui ora non insistiamo.

Egli integra ponendo

$$\frac{V}{\varphi} = \text{costante} \tag{2}$$

senza dare alcuna spiegazione della limitazione (2) e supponendo quindi implicitamente che ciò sia avvenuto per puro caso: cosa certo molto improbabile.

Ne segue quindi che, supposta vera la *causa* (cioè l'urto tra le due nebulose), la probabilità p affinchè si sia verificato l'*effetto* (cioè affinchè le distanze del sistema planetario risultante obbediscano ad una legge esponenziale) è certo estremamente piccola.

Ora noi vediamo che l'*effetto* si è verificato e vogliamo cercare la probabilità X affinchè esso sia dovuto alla causa assegnata dal Belot.

Chiamando perciò con ω la probabilità *a priori* di un urto tra una nebulosa vorticale con una non vorticale, la teoria delle probabilità di cause ci dà la nota formola del Bayes [1]

$$X = \frac{p\omega}{\Sigma p_i \omega_i} , \tag{3}$$

dove la sommatoria al denominatore va estesa a tutte le ipotesi analoghe (p. es. teoria di Laplace, teoria delle catture del See ecc.).

Noi non possiamo calcolare il secondo membro della (3) ignorando i fattori ω e p, ma possiamo con ragione affermare quanto segue:

La posizione (2) fatta dal Belot, introducendo al numeratore della (3) un fattore p estremamente piccolo, indebolisce in modo notevolissimo la probabilità della sua ipotesi.

[1] V. Bertrand, *Calcul de probabilités*, pag. 145; Poincaré, *Calcul de probabilités*, pag. 135.