ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Astronomia. — *Sul moto di rotazione della Terra; a proposito di una recente comunicazione del prof. Cerulli.* Nota del Socio P. Pizzetti.

1. La interessante Nota del Consocio Cerulli: *Sulla determinazione della polodia* (¹), mi offre occasione ad alcune osservazioni intorno al moto di rotazione di un corpo, in tutto, o in parte, rigido. Tali osservazioni sono in realtà di indole affatto elementare, ma avendo esse connessione con un problema molto importante e delicato qual'è quello degli spostamenti dei poli, non saranno forse ritenute inopportune.

L'errore, segnalato dal prof. Cerulli, del riportare tali e quali alla Sfera celeste (ossia agli assi cartesiani di direzione fissa nello spazio) le variazioni del polo terrestre, è evidente. Se un corpo nei successivi istanti $t_1, t_2, \ldots, t_r, \ldots$ ruota attorno alle rette $a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$, che supponiamo rigidamente connesse col corpo stesso, e le cui direzioni, al tempo t_1, sono rappresentate dai punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ della sfera celeste, il polo celeste all'epoca t_r non sarà già α_r, ma bensì quel punto che sulla sfera rappresenta la novella direzione assunta, nello spazio, dalla retta a_r per il complessivo effetto delle rotazioni avvenute nelle precedenti epoche $t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}, \ldots$ Ed è chiaro che questo effetto può esser tale da riportare il polo celeste vicinissimo alla sua posizione iniziale α_1, ancor quando la retta a_r faccia un angolo non piccolo colla a_1. E viceversa può avvenire che l'effetto accumulato delle considerate rotazioni sposti di molto il polo celeste, ancorchè sia piccolissimo l'angolo fra le rette a_1, a_r. La cinematica ci dice soltanto che: se l'asse istantaneo di rotazione è di posizione invariabile rispetto al corpo (polo terrestre fisso), sarà pure tale rispetto alle direzioni fisse dello spazio (polo celeste fisso); ma non afferma che a piccole variazioni del polo terrestre corrispondano variazioni piccole dello stesso ordine nel polo celeste, o viceversa.

Esempî classici di discordanza, sotto questo aspetto, presentano due casi notissimi: 1°, quello del *ciclo Euleriano*, o moto periodico del polo terrestre dovuto ad eventuale non coincidenza iniziale dell'asse di rotazione con uno degli assi principali d'inerzia terrestri: al quale moto periodico, dato che esista, corrisponde una variazione, d'ordine estremamente più piccola, della direzione assoluta dell'asse, ossia del polo celeste; 2°, gli spostamenti notevoli del polo celeste che vanno sotto il nome di precessione e nutazione

(¹) Questi Rendiconti, seduta 4 febbraio 1917.

luni-solare, ai quali corrisponde una variazione praticamente insensibile del polo terrestre.

2. Le relazioni fra le velocità di spostamento dei due poli possono stabilirsi come segue. Indichiamo con x_1, y_1, z_1, un sistema d'assi cartesiani invariabilmente legati alla parte solida del Globo, con x, y, z gli assi di direzione invariabile nello spazio. Colla consueta tabella

	x_1	y_1	z_1
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

esprimiamo i coseni di direzione dell'una terna rispetto all'altra. Detti (ξ, η, ζ), (ξ_1, ξ_2, ξ_3) i coseni di direzione dell'asse istantaneo di rotazione, al tempo t, rispetto alle due terne (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) rispettivamente, avremo:

$$\xi = \sum_i \alpha_i \xi_i \quad , \quad \eta = \sum_i \beta_i \xi_i \quad , \quad \zeta = \sum_i \gamma_i \xi_i$$

$(i = 1, 2, 3)$ e, colla derivazione rispetto a t:

$$(1) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \sum_i \alpha_i \frac{d\xi_i}{dt} \, , \quad \frac{d\eta}{dt} = \sum_i \beta_i \frac{d\xi_i}{dt} \quad , \quad \frac{d\zeta}{dt} = \sum_i \gamma_i \frac{d\xi_i}{dt} \, ,$$

annullandosi, per ovvie ragioni, nei secondi membri l'insieme dei termini che contengono le derivate degli $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ (1).

Assumiamo come postulati di fatto che, per tutto l'intervallo di tempo che si ha a considerare, siano piccolissimi gli spostamenti, sia del polo celeste rispetto alle stelle fisse, sia del polo terrestre rispetto alla Terra. Con ciò si potrà ritenere che facciano sempre angolo piccolissimo fra loro le tre rette z, z_1 e asse istantaneo, e ritenere quindi piccolissimi i coseni indicati con

$$\alpha_3 \, , \, \beta_3 \, , \, \gamma_1 \, , \, \gamma_2 \, , \, \xi_1 \, , \, \xi_2 \, , \, \xi \, , \, \eta \, .$$

Supporremo pure assai piccole le derivate $\frac{d\xi_i}{dt}$ e trascurabili i prodotti di

(1) Il punto che all'istante t trovasi sull'asse x a distanza 1 dall'origine delle coordinate, ha, in quell'istante, una velocità le cui componenti, rispetto agli assi x_1, y_1, z_1 sono le derivate di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rispetto a t. Ma la detta velocità è perpendicolare all'asse istantaneo. Quindi $\sum_i \xi_i \frac{d\alpha_i}{dt} = 0$

esse per i coseni ora menzionati. Nello stesso ordine di approssimazione, porremo nelle (1)

$$\alpha_1 = \cos\theta \ , \ \alpha_2 = -\operatorname{sen}\theta \ , \ \beta_1 = \operatorname{sen}\theta \ , \ \beta_2 = \cos\theta \ ,$$

ove θ è l'angolo fra il piano $z_1 x_1$ e il piano zx, oppure, sempre con la stessa approssimazione, il *tempo siderale* di un meridiano terrestre assegnato. Le due prime delle (1) potranno pertanto scriversi:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \cos\theta \frac{d\xi_1}{dt} - \operatorname{sen}\theta \frac{d\xi_2}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} &= \operatorname{sen}\theta \frac{d\xi_1}{dt} + \cos\theta \frac{d\xi_2}{dt} . \end{aligned}$$

Qui, sempre nello stesso ordine d'approssimazione, ξ_1 , ξ_2 possono rappresentare (a meno di un fattore costante) le due prime coordinate del polo terrestre rispetto agli assi terrestri, mentre ξ ed η esprimono le analoghe coordinate del polo celeste rispetto agli assi fissi.

Le formole (2) mettono in evidenza come le *velocità di variazione* dei due poli, terrestre e celeste, siano generalmente dello stesso ordine di grandezza. Ma nulla ne possiamo inferire, in generale, riguardo alla relazione di grandezza fra queste *variazioni*, per un intervallo finito di tempo, fino a che, per speciali condizioni imposte al problema, le equazioni della Meccanica non siano atte a darci il modo di variare, col tempo, della derivata del vettore *velocità angolare*, e quindi delle derivate di ξ_1 , ξ_2 , ξ_3.

3. Vi ha un caso in cui le (2) conducono ad una evidente conclusione: quello dei moti che possiamo dire *impulsivi*, ossia di quegli spostamenti del polo terrestre che possono essere dovuti a turbamenti improvvisi nel'assetto della corteccia terrestre (cataclismi). Tali moti si verificano in un tempo così breve, che nelle (2) si può ritenere θ costante e alle *derivate* sostituire le *variazioni finite* verificatesi nelle coordinate, del polo celeste (al 1° membro) e del terrestre (al 2° membro). Si ottiene così, con considerazioni elementari, quella conclusione alla quale si giunge di solito con calcoli assai complicati, che cioè *gli spostamenti del polo terrestre dovuti a fenomeni istantanei o cataclismi, si riproducono tali e quali nella posizione del polo celeste.* È il caso dello spostamento *par saccades* di cui discorre il dott. Roggero nella Memoria citata dal prof. Cerulli. Ma il limitarsi a considerare una tale specie di spostamenti conduce facilmente in errore.

4. Vogliamo qui indicare come, con un calcolo poco più che elementare, si possa, in casi particolari (che corrispondono probabilmente a fatti fisici assai comuni), mettere in evidenza il grado di mobilità del polo celeste di fronte a fenomeni che dànno migrazioni sensibili del polo terrestre.

Supponiamo, generalmente, variabili gli assi e i momenti principali di inerzia della Terra, considerando questa come composta di una parte rigida (alla quale si intendono connessi gli assi x_1, y_1, z_1) e di una parte variabile per effetto di maree, di fenomeni meteorici, sismici o simili.

Chiameremo A, B, C, D, E, F i consueti sei coefficienti d'inerzia rispetto agli assi x_1, y_1, z_1 e supporremo sempre piccolissimi D, E, F e di pochissimo variabili A, B, C; e assai piccole pure si supporranno le componenti f, g, h della *quantità di moto areale nel moto relativo* della parte variabile rispetto agli assi mobili x_1, y_1, z_1. Dette $\omega, \pi, \chi, \varrho$, la grandezza e le componenti, secondo x_1, y_1, z_1, della velocità angolare nel moto rotatorio del sistema (x_1, y_1, z_1) (delle quali componenti supporremo, in accordo coi postulati stabiliti da principio, piccolissime le due prime, e la terza pressapoco eguale alla velocità del moto diurno), le componenti della quantità di moto areale del sistema rispetto agli assi x_1, y_1, z_1 saranno

$$\begin{aligned} &A\pi - F\chi - E\varrho + f, \\ (3)\qquad &B\chi - D\varrho - F\pi + g, \\ &C\varrho - E\pi - D\chi + h. \end{aligned}$$

Se dunque indichiamo con K la grandezza della quantità di moto areale, e con *i una retta orientata secondo la direzione e il senso del vettore quantità di moto areale*, l'angolo γ fra la retta i e l'asse istantaneo (ossia fra la retta i cui coseni di direzione sono le quantità (3) divise per K e la retta i cui coseni sono π/ω, χ/ω, ϱ/ω) potrà dedursi dalla formola

$$\operatorname{sen}^2\gamma = \frac{1}{K^2\omega^2}\left[\{(B\chi - D\varrho - F\pi + g)\varrho - (C\varrho - E\pi - D\chi + h)\chi\}^2 + \right.$$
$$\left. + \cdots + \cdots\right].$$

dove i due termini non scritti si ottengono del primo con permutazione circolare nelle 4 terne (A, B, C) (D, E, F) (π, χ, ϱ) (f, g, h). Possiamo in ogni caso ritenere trascurabili i prodotti delle π, χ per le D, E, F, f, g, h, nonchè i quadrati e i prodotti delle π, χ e, nello stesso ordine di approssimazione, porre al denominatore $C\varrho$ in luogo di K. La precedente formola dà allora

$$(4)\qquad \operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{C\omega}\sqrt{[(B-C)\chi - D\varrho + g]^2 + [(C-A)\pi - E\varrho - f]^2}\,.$$

L'ordine di grandezza dei differenti termini che figurano sotto il segno radicale dipende naturalmente dalle ipotesi che si fanno sui movimenti delle masse fluide o, generalmente, sulle deformazioni cui si suppone soggetta la massa terrestre, e non è difficile, nei casi particolari, stabilire un limite superiore pei valori numerici dei termini stessi.

Supponiamo trascurabili $D . g , E , f$. La formola (4) dà allora

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{1}{C\omega} \sqrt{(B-C)^2 \chi^2 + (A-C)^2 \pi^2}\,.$$

Se si considera che l'angolo γ_1 fra l'asse istantaneo e l'asse z_1 è dato dalla formola

$$\operatorname{sen} \gamma_1 = \frac{\sqrt{\pi^2 + \chi^2}}{\omega}$$

e che, d'altra parte, i rapporti $\frac{B-C}{C}$, $\frac{A-C}{C}$ nel caso della Terra, sono assai piccoli (¹), riesce manifesto che, in questo caso, l'angolo γ è piccolissimo di fronte a γ_1 e che per conseguenza, se piccoli sono gli spostamenti del polo terrestre, di un ordine assai più piccolo (possiamo dire trascurabili) risultano gli scostamenti del polo celeste da quel punto che, sulla sfera celeste, rappresenta il vettore quantità di moto areale, ossia la retta i dianzi nominata.

D'altra parte questa retta i riesce di *direzione invariabile* ogni qualvolta si trascuri l'azione delle forze esterne (praticamente, il momento delle attrazioni del Sole e della Luna rispetto all'origine delle coordinate). Comunque sia, non è difficile, *riferendosi agli assi fissi* x , y , z, stabilire un limite superiore delle variazioni che, in un limitato periodo di tempo, le dette forze esterne possono produrre nelle componenti della quantità di moto areale e quindi nella orientazione della retta i.

Stabiliti tali limiti, e ritenuto trascurabile nelle precedenti ipotesi l'angolo γ, riescono perfettamente stabiliti dei limiti entro cui, nel dato periodo di tempo, può oscillare il polo celeste.

(¹) Questo è un dato di fatto che si deduce, com'è noto, dalla forma della superficie di livello terrestre.