# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXVI.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche.* Nota del Socio GIAN ANTONIO MAGGI.

La teoria delle distorsioni elastiche, iniziata da Weingarten, cui ne è dovuto il concetto informatore [1], sviluppata e arricchita, fin dal principio, di copiosi e interessanti risultati da Volterra [2], coltivata, in seguito, con successo, sotto varî aspetti, credo non ingannarmi nell'affermare che conseguì il suo definitivo assetto soltanto coi recenti lavori di Somigliana [3].

Difatti, Weingarten, proponendo lo studio delle deformazioni di equilibrio elastico, provocate da discontinuità dello spostamento, ad una data superficie interna, stabilisce la condizione che, alla stessa superficie, siano continui i parametri di dilatazione (componenti di deformazione, caratteristiche di deformazione, ecc.)

$$(1) \qquad x_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial \eta}{dy}, \quad z_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

$$y_z = z_y = \frac{\partial \zeta}{dy} + \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad z_x = x_z = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

affinchè siano continue quelle ch'egli chiama **tensioni**. D'onde risulta che, per esse, si devono intendere i parametri di pressione (componenti di pressione, caratteristiche di pressione, ecc.)

$$(2) \qquad X_x, \; Y_y, \; Z_z, \; Y_z = Z_y, \; Z_x = X_z, \; X_y = Y_x,$$

funzioni lineari omogenee dei precedenti, che, alla lor volta, riescono funzioni lineari omogenee di essi.

Volterra definisce come deformazione regolare quella per cui, in tutto il campo rappresentato dal corpo elastico, le (1) « sono funzioni finite, continue e monodrome, aventi le derivate del primo e del secondo ordine pure

(1) *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi.* Questi Rendiconti (5), X, 1° sem. 1901.

(2) Serie di Note in questi Rendiconti (5), XIV, 1° sem. 1905; *Sull'equilibrio dei corpi elastici molteplicemente connessi,* in Nuovo Cimento (5), X e XI, 1905-1906; *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes,* in Annales de l'École Normale (3), XXIV, 1907.

(3) *Sulla teoria delle distorsioni elastiche,* due Note, in questi Rendiconti (5), XXIII, 1° sem. 1914 e Nuovo Cimento (6), XI, 1916; *Sulle discontinuità dei potenziali elastici,* in Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, LI, 1915-16.

finite, continue e monodrome [1]; ed è codesta specie di deformazione che fa oggetto delle sue ricerche. Lo spostamento elastico, sotto queste condizioni, prescindendo dal caso che degeneri in spostamenti rigidi, è necessariamente continuo, in un campo semplicemente connesso. La monodromia è sempre da noi ammessa, quando non si affermi il contrario. Invece, in un campo molteplicemente connesso, può riuscire discontinuo, ad ogni superficie rappresentante un « diaframma », atto a diminuire l'ordine di connessione del campo; e la discontinuità risulta definita da uno spostamento rigido infinitesimale delle due faccie di un taglio, che s'immagini praticato lungo il diaframma, l'una per rispetto all'altra. La circostanza che alle superficie di discontinuità si possono assegnare le infinite posizioni diverse, assegnabili al corrispondente diaframma, senza mutare la distribuzione dei parametri di dilatazione, si traduce nella possibilità di rappresentare questo spostamento del corpo elastico sotto la forma di funzione continua e polidroma delle coordinate, attribuitagli da Volterra [2].

Quindi, adottando i termini di Somigliana di « spostamenti di Weingarten » e « spostamenti di Volterra » [3], codesti sono un caso particolare di quelli, a cui conferisce particolare interesse la natura della discontinuità, e l'indifferenza, almeno entro certi limiti, della posizione delle superficie a cui si verifica la discontinuità medesima.

Ora, il discorso con cui Weingarten accompagna la ricordata condizione, sembra affermare la necessità di essa pel mantenimento dell'integrità del corpo considerato [4]. Laddove per ciò è puramente necessaria la continuità, attraverso la supposta superficie di discontinuità dello spostamento, della pressione specifica, in ogni punto della superficie medesima, relativa alla semiretta avente la direzione della normale, nello stesso punto, e un senso prestabilito [5]. Vale a dire, non è necessaria, a tale scopo, la continuità

(1) *Un teorema sulla teoria della elasticità.* Questi Rendiconti (5), X, 1° sem. 1905, e Cap. I, Art. I della citata Memoria nel Nuovo Cimento.

(2) Ved. la mia Nota, *Sugli spostamenti elastici discontinui*, in questi Rendiconti (5), XVII, 1° sem. 1908. Ivi ho procurato di dedurre, per la via che reputo più diretta, gli accennati risultati, appartenenti a Volterra. Colgo l'occasione per indicare a pag. 574, linea 17, la correzione di costanti in funzioni, che, del resto, si rileva dal seguito del testo; avvertendo, chi cercasse la ragione della differenza di comportamento delle $p, q, r$ e delle $\xi, \eta, \zeta$, che le circuitazioni relative alle prime preesistono all'applicazione dei diaframmi, mentre, soltanto dopo interrotti con questi i corrispondenti circuiti, si procede al calcolo delle seconde.

(3) « Se le tensioni che si hanno nell'interno sono continue in tutto lo spazio occupato dal corpo, esso avrà il carattere di un solo ed unico corpo: ma se le tensioni fossero discontinue ove gli spostamenti sono discontinui, il corpo dovrebbe ritenersi come avente il carattere di più corpi distinti ». Loc. cit.

(4) *Sulle deformazioni elastiche non regolari.* Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, 1908.

(5) Ved. per es. i miei *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi*, § 405.

delle (2), ma puramente delle

$$(3)\qquad \begin{cases} X_n = X_x \cos\widehat{nx} + X_y \cos\widehat{ny} + X_z \cos\widehat{nz}\,, \\ Y_n = Y_x \cos\widehat{nx} + Y_y \cos\widehat{ny} + Y_z \cos\widehat{nz}\,, \\ Z_n = Z_x \cos\widehat{nx} + Z_y \cos\widehat{ny} + Z_z \cos\widehat{nz}\,, \end{cases}$$

componenti della pressione specifica suddetta.

Così, gli stessi spostamenti di Weingarten non rappresentano, fra i possibili, che un caso assai particolare.

Il sostanziale progresso, che la teoria delle distorsioni elastiche deve a Somigliana, consiste nella introduzione della suddetta condizione necessaria, invece della condizione di Weingarten.

In tal modo, indicando con D la differenza dei limiti, col tendere del punto considerato ad un punto della superficie, dalla parte verso cui il senso della normale è preso come positivo e dalla parte opposta ($D = \lim\limits_{n>0} - \lim\limits_{n<0}$), per una determinata forma della discontinuità dello spostamento, si hanno, ad ogni superficie $\sigma$ di discontinuità, le sei equazioni

$$(4)\qquad D\xi = \xi_\sigma\,, \qquad D\eta = \eta_\sigma\,, \qquad D\zeta = \zeta_\sigma\,.$$

$$(5)\qquad DX_z = 0\,, \qquad DY_z = 0\,, \qquad DZ_z = 0\,,$$

dove il punto limite è preso per origine e l'asse delle $z$ è formato colla normale $n$, presa col senso positivo. Con che gli assi delle $x$ e della $y$ risultano tangenti alla superficie nello stesso punto limite, e le $\xi_\sigma, \eta_\sigma, \zeta_\sigma$ rappresentano funzioni note, a piacere, o di coordinate curvilinee appartenenti alla superficie, o delle $x, y$, dedotte, in questo caso, da funzioni note di $x, y, z$, col fare $z = 0$.

Somigliana dimostra, in primo luogo, — per ricordare soltanto i risultati che fanno al nostro scopo — come le sei equazioni (4), (5) valgano a determinare la discontinuità D di ciascuno dei sei parametri di dilatazione [1].

Dall'espressione di queste discontinuità si deducono poi le discontinuità delle derivate prime, rispetto alle coordinate, delle componenti dello spostamento, $\xi, \eta, \zeta$, e da queste, col concorso delle equazioni dell'equilibrio, dove le forze limite (forze di massa) si suppongono nulle (o semplicemente continue alla superficie $\sigma$), le discontinuità delle derivate seconde delle stesse funzioni. Per cui Somigliana arriva a quest'altro risultato, sul quale particolarmente insistiamo, che, colle equazioni (4), tenuto conto delle (5) e delle equazioni dell'equilibrio elastico, sono determinate le discontinuità dei parametri di dilatazione, e quelle delle derivate prime e seconde delle componenti dello spostamento [2].

[1] Questi Rendiconti e Nuovo Cimento, 1ª Nota.
[2] Questi Rendiconti e Nuovo Cimento, 2ª Nota.

Si riconosce subito come, col concorso delle equazioni che si ottengono, derivando, membro a membro, le equazioni dell'equilibrio, rispetto alle singole coordinate, risultano determinate, allo stesso modo, le discontinuità delle derivate di ordine successivo delle componenti dello spostamento. E conseguenza di tutto ciò, che ci proponiamo qua di esaminare, è che le condizioni precedentemente enumerate, come quelle che, coi termini di Volterra, definiscono la deformazione regolare, si presentano come sovrabbondanti. Poichè, per quanto si è premesso, richiedono la continuità dei parametri di dilatazione e delle derivate prime e seconde dei parametri di dilatazione medesimi: e codesti risultano appartenere ad uno spostamento, provocato da discontinuità di forma prestabilita.

Questa forma, rappresentabile per mezzo di uno spostamento rigido delle due faccie di un taglio, praticato lungo la superficie di discontinuità, l'una per rispetto all'altra, rientra nel tipo che dà luogo agli spostamenti di Weingarten [1]. Per cui si può asserire, senz'altro, la continuità dei parametri di dilatazione. Restano da esaminare le derivate prime e seconde, e passiamo ora a dimostrarne la continuità: ossia a dimostrare la continuità delle derivate delle componenti dello spostamento, fino a quelle di terzo ordine, donde essa, senz'altro, scaturisce. Nè credo che le conclusioni di Volterra, relative alla possibilità della deformazione d'equilibrio elastico in discorso, le quali, attraverso a non semplice calcolo, fanno capo ai teoremi di esistenza, applicati a deformazioni ausiliari [2], tolgano opportunità a questa verificazione diretta di una proprietà indispensabile, per impostare la teoria matematica di una specie di equilibrio elastico, che l'esperienza concorre a raccomandare alla nostra attenzione.

Manteniamo a $x, y, z$ e a $\xi, \eta, \zeta$ il significato attribuitovi nelle (4) e (5), con cui gli assi delle $x$ e delle $y$ sono tangenti alla superficie $\sigma$, nel punto considerato, assunto come origine. Immaginiamo poi, al noto modo, una rete di linee coordinate, ortogonali, giacenti sulla superficie, e indichiamo con $u$ e $v$ i parametri variabili sulle linee delle due famiglie, che, colla loro mutua intersezione determinano i punti della superficie medesima; con che, al solito,

$$E\,du^2 + G\,dv^2$$

rappresenti il quadrato del differenziale di un arco, uscente dal punto $(u, v)$.

Inteso che gli assi delle $x$ e delle $y$ siano rispettivamente tangenti alla prima e alla seconda delle indicate linee coordinate ($v =$ cost e

[1] Nota citata.

[2] *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi.* Questi Rendiconti (5), XIV, 1° sem. 1905, e Cap. II, Art. II, della citata Memoria nel Nuovo Cimento.

$u = \text{cost}$), si verificano le relazioni [1]

$$\frac{\partial}{\partial u} = \sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial}{\partial v} = \sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial y}\,. \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} &= E\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} &= G\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} &= \sqrt{EG}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Indichiamo ora con $\varphi$ una funzione di $x, y, z$ o di $u, v, n$, come sono le $\xi, \eta, \zeta$, alla quale attribuiamo le proprietà che possiedono queste funzioni, almeno in prossimità di $\sigma$, e poniamo

$$\lim_{n>0} - \lim_{n<0} = D \quad , \quad D\varphi = \varphi_\sigma\,, \tag{8}$$

con che $\varphi_\sigma$ rappresenterà una funzione di $u, v$, o di $x, y$, da dedursi da una funzione di $x, y, z$, col farvi $z = 0$.

Rammentiamo la formola commutativa, dove la funzione $\varphi$ s'intende soddisfare le condizioni occorrenti per la sua validità [2]

$$D\,\frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu\,\partial u^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} D\varphi}{\partial u^\mu\,\partial v^\nu}\,. \tag{9}$$

Con questo, dalle (6) si ricavano

$$D\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x} \quad , \quad D\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial\varphi} \tag{10}$$

$$D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\,D\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad , \quad D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\,D\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,, \tag{11}$$

e dalle (7)

$$\left\{\begin{aligned} D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2\varphi_\sigma}{\partial x^2} + \frac{1}{E}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\delta\,, \\ D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2\varphi_\sigma}{\partial y^2} + \frac{1}{G}\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,\delta\,, \qquad \delta = \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial z} - D\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,, \\ D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2\varphi_\sigma}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{\sqrt{EG}}\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,\delta\,, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

(1) Cfr. la mia Nota, *Sopra una formola commutativa e alcune sue applicazioni.* A pag. 189 del presente volume di questi Rendiconti.

(2) Ved. la suddetta mia Nota.

Prendiamo per $\varphi$ le $\xi, \eta, \zeta$. Colle (10) formiamo il salto delle loro derivate prime, rispetto alle coordinate tangenziali $x$ e $y$.

Inteso poi il corpo isotropo, e cioè

$$X_x = -\lambda \varkappa - 2\mu x_x \quad , \quad Y_z = -\mu y_z \quad , \quad \varkappa = x_x + y_y + z_z ,$$

e formole analoghe, dove $\lambda, \mu$ indicano le « costanti d'elasticità », col concorso delle (5), invocando le (1), si trova subito [1]

$$(13) \quad D\frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta_\sigma}{\partial x} \quad , \quad D\frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta_\sigma}{\partial y} \quad , \quad D\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \eta_\sigma}{\partial y}\right).$$

Introduciamo ora la forma particolare di discontinuità dello spostamento, a cui si riferisce il nostro discorso, e poniamo quindi

$$(14) \quad \xi_\sigma = a + qz - ry \quad , \quad \eta_\sigma = b + rx - pz \quad , \quad \zeta_\sigma = c + py - qx \quad (z = 0),$$

dove, fissato il punto limite, $a, b, c, p, q, r$ rappresentano altrettante costanti.

Ne vengono, per (10) e (13),

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{lll} D\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0 & , \quad D\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = -r & , \quad D\dfrac{\partial \xi}{\partial z} = q , \\[2ex] D\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = r & , \quad D\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0 & , \quad D\dfrac{\partial \eta}{\partial z} = -p , \\[2ex] D\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = -q & , \quad D\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = p & , \quad D\dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 . \end{array} \right.$$

Donde risulta nullo il salto di ciascuno dei parametri di dilatazione [cfr. (1)], conformemente al risultato già ricordato. Per le stesse (14), sono poi nulle tutte le derivate seconde di $\xi_\sigma, \eta_\sigma, \zeta_\sigma$ rispetto a $x$ e a $y$. Inoltre, per (14) e (15) si verifica, qualunque dello $\xi, \eta, \zeta$ sia rappresentata da $\varphi$,

$$(16) \quad \delta = \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial z} - D\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 ,$$

Ne segue, per (11) e (12), che risulta nullo il salto di tutte le derivate seconde di $\xi, \eta, \zeta$, rispetto alle coordinate $x, y, z$, eccettuate, pel momento, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}$.

[1] Somigliana: la prima delle citate Note *Sulla teoria delle distorsioni elastiche.*

Per queste, rammentiamo le equazioni d'equilibrio

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial \varkappa}{\partial x}+\mu\,\Delta_2\xi+X=0\,,\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial \varkappa}{\partial y}+\mu\,\Delta_2\eta+Y=0\,,\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial \varkappa}{\partial z}+\mu\,\Delta_2\zeta+Z=0\,,\\
&\varkappa=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\quad,\quad \Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

dove le X, Y, Z s'intenderanno continue sulla superficie $\sigma$.

Applicando la D a queste equazioni, diventano tre equazioni, che rispettivamente forniscono $D\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}$, $D\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}$, $D\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}$, come funzioni lineari omogenee delle D delle rimanenti derivate seconde delle $\xi, \eta, \zeta$. Le quali sono tutte nulle, per modo che ne segue pure

$$
(18)\qquad D\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=0\quad,\quad D\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}=0\quad,\quad D\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}=0
$$

Si conclude che è nullo il salto di tutte le derivate seconde delle $\xi$, $\eta, \zeta$: e, per conseguenza, conformemente a (1), nullo il salto delle derivate prime dei parametri di dilatazione.

Per dimostrare che è nullo il salto delle derivate seconde degli stessi parametri di dilatazione, si dimostra, in modo analogo, che è nullo il salto di tutte le derivate terze delle $\xi, \eta, \zeta$, rispetto alle coordinate $x, y, z$.

Serve perciò una serie di formole, che si stabiliscono, proseguendo il procedimento tenuto per formare le (10), (11), (12), nelle quali introdurremo, senz'altro, i precedenti risultati sul salto delle derivate seconde.

Collo stesso significato di $\varphi$, valendosi sempre della (9), si ricava, in primo luogo, dalle (6):

$$
D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial x}D\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\quad,\quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\,\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial y}D\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,,
$$

per cui

$$
D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial z^2}=0\quad,\quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\,\partial z^2}=0:
$$

in secondo luogo, si ricava dalle (7):

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}D\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{E}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\delta',$$

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^2\,\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}D\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{G}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\delta', \qquad \delta'=\frac{\partial}{\partial z}D\frac{\partial\varphi}{\partial z}-D\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}D\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\delta',$$

per cui

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial z}=0\quad,\quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^2\,\partial z}=0\quad,\quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0:$$

Per le rimanenti derivate terze, si comincia col trovare le formole che succedono alle (6) e (7). Si ottiene così, per esempio,

$$\frac{\partial^3}{\partial u^3}=E\sqrt{E}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}+3\sqrt{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial u^3}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial u^3}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial u^3}.$$

Ne segue, valendosi della (9), e tenendo conto di (10), (11) e (12),

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=\frac{\partial^3\varphi_\sigma}{\partial x^3}+\frac{3}{E\sqrt{E}}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)\delta;$$

per cui, conformemente alle ipotesi e ai risultati precedenti,

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=0.$$

E allo stesso modo si trova

$$D\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}=0\quad,\quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}=0\quad,\quad D\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}=0.$$

Rimangono

$$D\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3}\quad,\quad D\frac{\partial^2\eta}{\partial z^3}\quad,\quad D\frac{\partial^3\zeta}{\partial z^3}. \tag{19}$$

Per queste, deriveremo le tre equazioni di equilibrio (17), ordinatamente, rispetto a $x$, a $y$ e a $z$; e supposte le $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial z}$ continue, alla superficie $\sigma$, applicheremo la D ai due membri delle equazioni così formate. Esse forniranno le (19) come funzioni lineari omogenee delle D delle derivate terze rimanenti delle stesse $\xi, \eta, \zeta$. Le quali sono dimostrate tutte nulle. Per cui, finalmente, ne risultano pure

$$D\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3}=0\quad,\quad D\frac{\partial^3\eta}{\partial z^3}=0\quad,\quad D\frac{\partial^3\zeta}{\partial z^3}=0.$$