ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° aprile 1917.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica terrestre. — *Sulla propagazione delle onde sismiche.* Nota I del Socio C. Somigliana.

L'ipotesi più semplice che si può fare, per avere una rappresentazione meccanica delle oscillazioni sismiche, è che si tratti di onde propagantisi in un suolo piano illimitato e infinitamente profondo.

Fu fatta anche l'ipotesi di uno strato piano illimitato, onde accordarsi con alcune vedute, attualmente accettate, intorno alla costituzione interna della terra. Così procede il Love in *Some Problems of Geodynamics*; ed anche il De Marchi nelle due interessanti Note, comunicate lo scorso anno a questa R. Accademia.

Io mi atterrò alla prima ipotesi, e considererò da un punto di vista generale la propagazione di onde piane. Si può così ugualmente arrivare ad alcuni risultati interessanti, da cui dedurre qualche nuovo concetto circa le principali caratteristiche del fenomeno, quale effettivamente si osserva.

Si ammette generalmente dai sismologi, dopo Oldham, che dei tre gruppi di onde, che compongono generalmente un sismogramma, quello che arriva ultimo, detto delle *undae longae*, che sono anche le più ampie e regolari, corrisponda alle *onde superficiali* scoperte da Lord Rayleigh. La velocità di propagazione di queste onde è teoricamente determinata da una delle tre radici reali, la più piccola, di una certa equazione di 3° grado. Per gli altri due gruppi si ammette che siano ordinarie onde piane, rispettivamente longitudinali e trasversali, provenienti dall'interno della terra.

Ora io ho potuto dimostrare che anche alle altre due radici dell'equazione di 3° grado di Lord Rayleigh, finora trascurate, corrispondono onde piane speciali del suolo, le quali risultano dalla sovrapposizione di un'onda longitudinale e di un'onda trasversale. Queste due onde hanno un'identica velocità di propagazione *superficiale*. L'equazione di Rayleigh dà appunto la soluzione del problema della ricerca delle coppie di onde (l'una longitudinale, l'altra trasversale) inclinate fra loro in modo da dar luogo ad una identica velocità di propagazione sulla superficie libera del suolo. Queste onde vengono così a sovrapporsi in superficie, e senza possibilità di interferire, a cagione della ortogonalità delle loro oscillazioni. È perciò anche presumibile che diano luogo agli effetti superficiali più sensibili.

Le onde superficiali di Rayleigh risultano poi, in certo modo, una soluzione singolare del problema enunciato.

Da questi risultati sorge quindi spontanea, e suggestiva, l'idea di far corrispondere alle tre radici dell'equazione di Rayleigh ed ai tre relativi sistemi di onde, i tre gruppi di vibrazioni che la osservazione rivela. Anche numericamente i valori che si ottengono per le velocità di propagazione sono in sufficiente accordo con quelli osservati.

Si avrebbe così una spiegazione meccanica, mai data finora, della formazione dei tre gruppi caratteristici (P), (S), (L) di onde, che quasi sempre si osservano. Tuttavia l'approssimazione che è possibile raggiungere nel problema delle vibrazioni di un suolo piano, rispetto a quelle della sfera, ci induce ad attribuire a tale spiegazione un carattere più qualitativo che quantitativo. Un apprezzamento definitivo non si potrà avere che quando sia possibile trasportare le considerazioni enunciate nel campo della sfera vibrante.

I.

Consideriamo un suolo piano illimitato, che supporremo orizzontale. L'asse delle z sia verticale, diretto dal basso verso l'alto, e sia $z = 0$ la superficie del suolo.

Chiameremo piano di propagazione il piano determinato dalla normale ad un sistema di onde piane e dalla verticale, passanti per uno stesso punto. Fissata l'origine in un punto del piano $z = 0$, sceglieremo come piano zx il piano di propagazione rispetto al sistema di onde piane, che vogliamo studiare. Il piano d'onda sarà allora parallelo all'asse delle y; e se indichiamo con

$$\alpha x + \gamma z = \text{cost.}$$

l'equazione di uno qualsiasi dei piani d'onda, e con θ l'angolo, che diremo di *emergenza*, che la direzione di propagazione fa coll'asse delle x, avremo

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} .$$

Il vettore rappresentante la vibrazione avrà allora una componente secondo la normale all'onda, che darà luogo ad un movimento longitudinale e sarà rappresentato da

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \alpha\varphi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon_1 t) \\ v_1 &= 0 \\ w_1 &= \gamma\varphi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon_1 t), \end{aligned}$$

ove φ è una funzione arbitraria, ed u, v, w rappresentano le solite componenti di spostamento, t è il tempo ed ε_1 una costante. Se la funzione φ avesse valori differenti da zero solo per valori dell'argomento

$$\zeta = \alpha x + \gamma z - \varepsilon_1 t$$

compresi fra certi limiti, si avrebbe un'onda *isolata* o *solitaria*, come suol dirsi.

Avremo poi una componente normale alla direzione di propagazione, che alla sua volta potrà decomporsi in due: l'una giacente nel piano zx cioè nel piano di propagazione e rappresentata da

$$(2) \qquad \begin{aligned} u_2 &= \gamma\psi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon_2 t) \\ v_2 &= 0 \\ w_2 &= -\alpha\psi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon_2 t) \end{aligned}$$

e l'altra parallela all'asse y, normale al piano di propagazione, rappresentata da

$$(3) \qquad \begin{aligned} u_3 &= 0 \\ v_3 &= \chi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon_3 t) \\ w_3 &= 0 \end{aligned}$$

ove ψ, χ sono nuove funzioni arbitrarie, $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ delle nuove costanti.

L'onda piana più generale si avrà dalla sovrapposizione dei tre sistemi di vibrazioni (1) (2) (3), cioè avrà per componenti di vibrazione

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \qquad v = v_1 + v_2 + v_3 \qquad w = w_1 + w_2 + w_3 .$$

Le relazioni che risultano dalle equazioni del moto per le costanti $\alpha, \gamma, \varepsilon$ sono quelle ben note, che determinano le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali. La vibrazione (1) è longitudinale; la sua velocità normale di propagazione, indicando con λ, μ le costanti elastiche di Lamé, con ϱ la densità, sarà data da

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} .$$

Ma se indichiamo con V la velocità superficiale di propagazione dell'onda (o anche la velocità di propagazione nella direzione dell'asse delle x) si ha

$$V = \frac{\varepsilon_1}{\alpha} \quad \text{e quindi} \quad a = V \cos \theta \,. \tag{4}$$

Da cui deduciamo

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} (\alpha^2 + \gamma^2) = \varepsilon_1^2 \,. \tag{5}$$

In modo analogo, osservando che le onde (2), (3) sono trasversali, si conclude che la loro velocità normale di propagazione sarà

$$b = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

e quindi per le relazioni precedenti $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$,

$$\frac{\mu}{\varrho} (\alpha^2 + \gamma^2) = \varepsilon_2^2 \,. \tag{6}$$

Queste relazioni (5), (6) sono le sole necessarie e sufficienti, perchè le (1), (2), (3) possano rappresentare sistemi di onde piane possibili in un mezzo illimitato in ogni senso, le cui costanti d'elasticità siano λ, μ e ϱ la densità.

II.

Consideriamo ora due onde piane, l'una longitudinale, l'altra trasversale, aventi angoli d'emergenza differenti, θ_a e θ_b. Siano α_1, γ_1 le due costanti α, γ per la prima, ed α_2, γ_2 per la seconda. Le rispettive velocità superficiali di propagazione saranno

$$V_a = \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = \frac{a}{\cos \theta_a} \qquad V_b = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = \frac{b}{\cos \theta_b}$$

mentre per (5), (6) dovrà essere

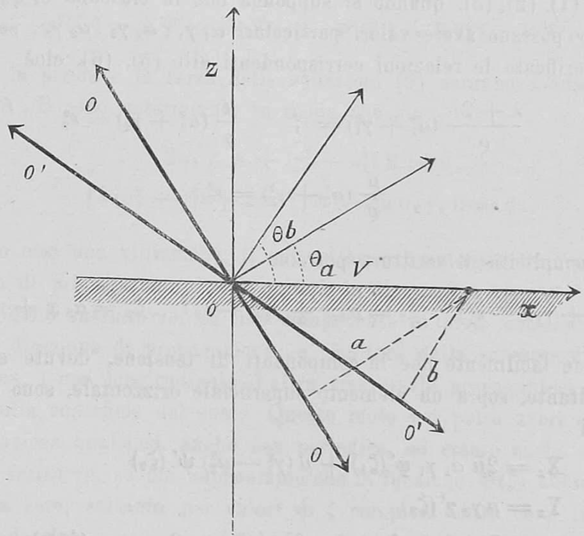
$$\varepsilon_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} (\alpha_1^2 + \gamma_1^2) \qquad \varepsilon_2^2 = \frac{\mu}{\varrho} (\alpha_2^2 + \gamma_2^2) \,. \tag{7}$$

Ora noi possiamo domandarci quali condizioni debbano essere soddisfatte perchè le velocità superficiali delle due onde risultino identiche: cioè perchè sia $V_a = V_b$. Si dovrà avere fra i due angoli di emergenza (vedi la annessa figura) la relazione

$$a \cos \theta_b = b \cos \theta_a \tag{8}$$

ossia

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \gamma_1^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \gamma_2^2}}. \tag{8'}$$



Possiamo quindi immaginare infinite coppie di onde piane (come le OO, $O'O'$ della figura annessa) l'una longitudinale, l'altra trasversale, a cui competono velocità identiche di propagazione superficiale. Le rispettive inclinazioni delle due direzioni di propagazione sono determinate dalla (8) o dalla (8').

Però in generale non possiamo dire che una coppia di onde sovrapposte di tal fatta possa effettivamente propagarsi nel suolo che consideriamo, se non teniamo conto anche delle condizioni che devono essere soddisfatte alla superficie.

Noi ci proporremo appunto di determinare quali condizioni debbano essere soddisfatte perchè una coppia di onde sovrapposte, come quelle ora considerate, possa effettivamente propagarsi in un suolo piano. Dovranno, come è ben noto, essere nulle le componenti della tensione elastica relativa a qualsiasi elemento piano della superficie libera; cioè si dovrà avere, per $z=0$,

$$(9)\qquad \begin{aligned} X_z &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0\\ Y_z &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0\\ Z_z &= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\,\frac{\partial w}{\partial z}=0\,. \end{aligned}$$

Ora consideriamo la vibrazione che risulta dalla sovrapposizione delle vibrazioni (1), (2), (3), quando si supponga che in ciascuna di queste le costanti α, γ possano avere valori particolari $\alpha_1\,\gamma_1$, $\alpha_2\,\gamma_2$, $\alpha_3\,\gamma_3$, sempre supponendo verificate le relazioni corrispondenti alle (5), (6), cioè

$$(10)\qquad \frac{\lambda+2\mu}{\varrho}(\alpha_1^2+\gamma_1^2)=\varepsilon_1^2 \qquad \frac{\mu}{\varrho}(\alpha_2^2+\gamma_2^2)=\varepsilon_2^2$$
$$\frac{\mu}{\varrho}(\alpha_3^2+\gamma_3^2)=\varepsilon_2^2\,.$$

Per semplicità di scrittura porremo

$$\zeta_1=\alpha_1 x+\gamma_1 z-\varepsilon_1 t \qquad \zeta_2=\alpha_2 x+\gamma_2 z-\varepsilon_2 t \qquad \zeta_3=\alpha_3 x+\gamma_3 z-\varepsilon_2 t\,.$$

Si vede facilmente che le componenti di tensione, dovute alla vibrazione risultante, sopra un elemento superficiale orizzontale, sono date dalle espressioni

$$(11)\qquad \begin{aligned} X_z &= 2\mu\,\alpha_1\,\gamma_1\,\varphi'(\zeta_1)+\mu(\gamma_2^2-\alpha_2^2)\,\psi'(\zeta_2)\\ Y_z &= \mu\,\gamma_3\,\chi'(\zeta_3)\\ Z_z &= [\lambda(\alpha_1^2+\gamma_1^2)+2\mu\gamma_1^2]\,\varphi'(\zeta_1)-2\mu\,\alpha_2\,\gamma_2\,\psi'(\zeta_2) \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\varphi'(\zeta)=\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta} \qquad \psi'(\zeta)=\frac{d\varphi'(\zeta)}{d\zeta} \qquad \chi'(\zeta)=\frac{d\chi(\zeta)}{d\zeta}\,.$$

La vibrazione considerata è la più generale che possiamo dedurre dalle nostre formole relative alle onde piane. Ora dalle formole precedenti per le tensioni, risulta che non è possibile che Y_z si annulli senza supporre una forma speciale per $\chi(\zeta)$ che porti come conseguenza $\chi'(\zeta_3)=0$, per $z=0$. Possiamo invece cercare di soddisfare alle altre due condizioni, senza imporre alcuna condizione di questo genere alle funzioni φ, ψ.

Supponiamo infatti che fra le costanti α_1, α_2, ε_1, ε_2 si abbia la relazione

$$(12)\qquad \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}=\frac{\varepsilon_2}{\alpha_2}=V$$

cioè che sia identica la velocità di propagazione superficiale delle onde (1) e (2); ed inoltre che sia

$$(13)\qquad \begin{aligned} \varphi'(\zeta) &= \mathrm{A}\,\Psi'\left(\frac{\zeta}{\alpha_1}\right) \\ \psi'(\zeta) &= \mathrm{B}\,\Psi'\left(\frac{\zeta}{\alpha_2}\right) \end{aligned}$$

dove Ψ' è una nuova funzione arbitraria (che per comodità di calcolo poniamo sotto forma di derivata), ed A, B sono delle costanti. È chiaro che per $z = 0$ avremo

$$\varphi'(\zeta_1) = \mathrm{A}\,\Psi'(x - \mathrm{V}t) \qquad \Psi'(\zeta_2) = \mathrm{B}\,\Psi'(x - \mathrm{V}t)$$

e quindi la prima e la terza delle equazioni (9) saranno soddisfatte, se le costanti A, B sono determinate in modo che sia

$$(14)\qquad \begin{aligned} 2\alpha_1\gamma_1\,\mathrm{A} + (\gamma_2^2 - \alpha_2^2)\,\mathrm{B} &= 0 \\ [\lambda(\alpha_1^2 + \gamma_1^2) + 2\mu\gamma_1^2]\,\mathrm{A} - 2\mu\,\alpha_2\gamma_2\,\mathrm{B} &= 0\,. \end{aligned}$$

Otterremo così una vibrazione, il cui vettore vibrante giacerà completamente nel piano di propagazione; avrà quindi, in linguaggio sismico, una componente di moto *sussultorio*, ed una componente di moto *ondulatorio*, parallela alla direzione di propagazione; e risulterà dalla sovrapposizione di due onde piane, l'una longitudinale, l'altra trasversale propagantesi con velocità uguale sulla superficie del suolo. Questo moto poi potrà avere i caratteri di una vibrazione qualsiasi, anche non periodica, ed essere anche costituito da un'*onda solitaria*, se noi supponiamo che la funzione $\Psi(\zeta)$ abbia valori differenti da zero, soltanto per valori di ζ compresi entro certi limiti l, L; cioè quando sia

$$l < \zeta < \mathrm{L}\,.$$

Dobbiamo ora vedere se, e come, sia possibile soddisfare a tutte queste condizioni mediante le costanti che entrano nelle nostre formole. Queste condizioni sono rappresentate dalle prime due equazioni (10), e dalle (12), (14).

Innanzi tutto per la compatibilità delle due equazioni (14), dovremo avere, eliminando il rapporto A:B,

$$(15)\qquad 4\mu\,\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2 + (\lambda\alpha_1^2 + (\lambda + 2\mu)\gamma_1^2)(\gamma_2^2 - \alpha_2^2) = 0\,.$$

Questa equazione determina una relazione che deve esistere fra le due direzioni di propagazione delle due onde associate. Essendo infatti

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \mathrm{tg}\,\theta_a \qquad \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \mathrm{tg}\,\theta_b$$

essa può essere scritta anche

$$(15') \qquad 4\mu \operatorname{tg}\theta_a \operatorname{tg}\theta_b + (\lambda + (\lambda + 2\mu)\operatorname{tg}^2\theta_a)(\operatorname{tg}^2\theta_b - 1) = 0 .$$

Inoltre dalle (10) abbiamo

$$(16) \qquad \begin{aligned} \varrho\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}\right)^2 &= (\lambda + 2\mu)\left(1 + \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2\right) \\ \varrho\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha_2}\right)^2 &= \mu\left(1 + \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

e quindi per le (12)

$$(17) \qquad \varrho V^2 = (\lambda + 2\mu)\left(1 + \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2\right) = \mu\left(1 + \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2\right).$$

Mediante queste due relazioni possiamo eliminare i rapporti $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$ dalla (15) ed ottenere un'equazione che contenga soltanto V. Si arriva facilmente a questa equazione osservando che dalla (15) si ha

$$16\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2\mu^2 = \left(\lambda + (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2\right)^2\left(1 - \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2\right)^2$$

e sostituendo in questa i valori di $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$ che risultano dalle (17). Si ottiene così

$$16\left(\frac{\varrho V^2}{\lambda + 2\mu} - 1\right)\left(\frac{\varrho V^2}{\mu} - 1\right)\mu^2 = (\varrho V^2 - 2\mu)^2\left(2 - \frac{\varrho}{\mu}V^2\right)^2$$

ossia introducendo le costanti a, b del mezzo

$$(18) \qquad \left(\frac{V^2}{b^2} - 2\right)^4 - 16\left(\frac{V^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{V^2}{b^2} - 1\right) = 0 .$$

È questa l'equazione che determina V; ed essa coincide esattamente colla equazione a cui è giunto Lord Rayleigh ricercando la velocità di propagazione delle sue onde superficiali. Noi vi siamo giunti per altra via, studiando un problema assai diverso; ma la soluzione di Rayleigh rientra nel quadro generale delle formole che abbiamo stabilito, come vedremo meglio in seguito. Essa si presenta come una soluzione *singolare* del problema della propagazione delle onde sovrapposte, aventi uguale velocità superficiale di propagazione.

Per ogni radice della equazione di Rayleigh (18), le relazioni (16) determinano i corrispondenti valori dei rapporti $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$ ossia di $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$, e dànno quindi le due direzioni di propagazione delle due onde associate. Dallo (14) poi si potrà ricavare il valore del rapporto A:B, e quindi tenendo conto delle (13) ottenere le effettive espressioni delle componenti di vibrazione. Conviene pertanto discutere la possibilità di soluzioni reali per tutte queste equazioni.

Ricordiamo anzitutto che l'equazione (18) ammette la soluzione $V^2=0$, e che togliendo questo fattore V^2 e ponendo

$$V^2 = \eta b^2$$

essa assume la forma

$$(19) \qquad f(\eta) = \eta^3 - 8\eta^2 + 8\left(3 - 2\frac{b^2}{a^2}\right)\eta - 16\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 0 .$$

E siccome si ha

$$f(0) = -16\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \qquad f(1) = 1$$

ed inoltre, per note proprietà,

$$\frac{b^2}{a^2} < 1 ,$$

essa ha sempre una radice compresa fra 0 ed 1. Il valore corrispondente di V sarà perciò minore della velocità b delle onde trasversali. Ora dalle (16) si ottiene

$$(20) \qquad \operatorname{tg}^2\theta_a = \frac{b^2}{a^2}\eta - 1 \qquad \operatorname{tg}^2\theta_b = \eta - 1$$

e perciò, se $\eta < 1$, i corrispondenti valori di $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$ non possono essere reali.

Alla radice considerata della equazione di Rayleigh non corrisponde perciò alcuna soluzione reale del problema da noi posto. Ma *formalmente* le nostre equazioni sono soddisfatte anche dai valori immaginari, che in tal modo si trovano; quindi, separando la parte reale dalla immaginaria, noi possiamo ottenere anche in questo caso delle soluzioni reali delle equazioni delle vibrazioni; le quali non corrisponderanno allo speciale problema meccanico, da cui siamo partiti, ma rappresenteranno sempre delle vibrazioni speciali possibili nel suolo. Le onde superficiali di Lord Rayleigh non sono che un caso particolare di queste vibrazioni. Ce ne occuperemo in seguito.

Consideriamo ora il caso in cui il nostro problema ammette soluzioni reali.

Discuterò in altra occasione quali siano le condizioni perchè le radici dell'equazione (18) siano tutte reali. Qui mi limiterò a considerare il caso, ammesso come tipico dai sismologi, anzi, si può dire, da essi quasi unicamente preso in considerazione, quello in cui

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$$

che corrisponde al caso in cui pel coefficiente di Poisson si ha $\sigma=\frac{1}{4}$, valore che si ritiene abbastanza prossimo al valor medio di questo coefficiente pei materiali che compongono la crosta superficiale terrestre. In questo caso la equazione (19) diviene

$$\eta^3-8\eta^2+\frac{56}{3}\eta-\frac{32}{3}=0$$

e le sue radici sono tutte reali, e cioè [1]

$$\eta_1=4 \qquad \eta_2=2\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \eta_3=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

L'ultima, minore di 1, è quella di cui abbiamo poco innanzi dimostrata l'esistenza per qualunque valore del rapporto $b^2:a^2$.

Lasciando per ora da parte questa radice, che dà le onde di Rayleigh, cerchiamo i valori di θ_a, θ_b corrispondenti alle altre due.

Le equazioni (20) per la prima radice $\eta_1=4$ dànno

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{tg}\theta_a=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{tg}\theta_b=\sqrt{3} \qquad V_1=2b\,,$$

quindi abbiamo rispettivamente per l'angolo di emergenza dell'onda longitudinale e della trasversale associata i valori

$$\theta_a=30^\circ \qquad \theta_b=60^\circ.$$

Osserviamo inoltre che colle formole (20) sono compatibili anche i valori

$$\theta_a=-30^\circ \qquad \theta_b=-60^\circ$$

i quali corrispondono alle due onde riflesse delle precedenti sulla superficie libera del suolo. Per ogni coppia di onde sovrapposte, che otterremo come possibile dalle nostre equazioni, avremo quindi sempre anche la coppia delle corrispondenti onde riflesse.

[1] V. Galitzin, *Lezioni di Sismometria*, Cap. II.

Consideriamo ora la seconda radice η_2. Abbiamo in questo caso dalle (20)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2 \theta_a &= \frac{1}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3}) = 0{,}0515\, b \\
\operatorname{tg}^2 \theta_b &= \frac{1}{\sqrt{3}}(2+\sqrt{3}) = 2{,}1547\, b \qquad (22) \\
V_2 &= b\sqrt{2\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 1{,}7761\, b
\end{aligned}
$$

da cui si ricava, trascurando i secondi di grado,

$$\theta_a = \pm\, 12^\circ.47' \qquad \theta_b = \pm\, 55^\circ.44'.$$

Sono questi i valori numerici corrispondenti alla seconda coppia di onde associate, nel caso che pel rapporto di Poisson si assuma il valore solitamente ammesso $\sigma = \frac{1}{4}$. Ma ciò che più interessa la nostra teoria è il fatto che questi valori sono tutti reali e dimostrano quindi la reale esistenza delle onde considerate.

Ritorniamo ora alle formole iniziali, da cui siamo partiti, per ricavarne le espressioni effettive delle componenti di vibrazione colla introduzione dei valori trovati per le costanti. Scriveremo queste espressioni sotto forma generale, applicabile tanto alle onde della radice η_1 che a quella della radice η_2. Conserveremo cioè le espressioni generiche V, $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$, per le quali nei due casi si dovranno poi prendere rispettivamente i valori (21) o (22).

Tenendo presenti le equazioni (13) possiamo porre

$$
\begin{aligned}
\varphi(\zeta_1) &= A\,\Psi\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} z + x - Vt\right) \\
\varphi(\zeta_2) &= B\,\Psi\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2} z + x - Vt\right).
\end{aligned}
$$

Mentre dalla prima delle equazioni (14) ricaviamo

$$\frac{A}{B} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\theta_b}{2\operatorname{tg}\theta_a}\,\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}$$

e possiamo quindi porre

$$A = \frac{1}{2\alpha_1^2 \operatorname{tg}\theta_a} \qquad B = \frac{1}{\alpha_2^2(1-\operatorname{tg}^2\theta_b)}.$$

Ora sostituendo nelle equazioni

$$u_1 = \alpha_1 \varphi(\zeta_1) \qquad u_2 = \gamma_2 \psi(\zeta_2)$$

$$w_1 = \gamma_1 \varphi(\zeta_1) \qquad w_2 = -\alpha_2 \psi(\zeta_2)$$

troviamo per l'onda longitudinale

$$(23) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\alpha_1 \operatorname{tg} \theta_a} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_a + x - \mathrm{V}t) \\ w_1 &= \frac{1}{2\alpha_1} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_a + x - \mathrm{V}t) \end{aligned}$$

e per la trasversale

$$(23') \qquad \begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{\operatorname{tg} \theta_b}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_b + x - \mathrm{V}t) \\ w_2 &= -\frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_b + x - \mathrm{V}t) \end{aligned}$$

ed abbiamo così la rappresentazione completa di una qualsiasi delle nostre coppie di onde associate, cui compete uguale velocità di propagazione superficiale, come manifestamente risulta dalle formole precedenti.

In queste formole Ψ è funzione completamente arbitraria. Nessuna limitazione quindi risulta per le onde che si propagano in superficie, cioè sul piano $z = 0$. Esse possono essere anche *non periodiche*, ed essere anche *onde isolate* se supponiamo che la Ψ abbia valori nulli quando la variabile da cui dipende esce da certi limiti arbitrariamente fissati. La teoria basata sulle formole precedenti è quindi indipendente da qualsiasi ipotesi circa la lunghezza d'onda delle vibrazioni, e conciliabile con qualsiasi dato di fatto che l'osservazione possa rivelare a questo proposito. La possibilità dell'onda isolata poi ci avvicina notevolmente alla realtà.

Finalmente le costanti α_1, α_2 nelle formole precedenti sono ancora a nostra disposizione. Noi possiamo approfittare di questa arbitrarietà per introdurre un elemento importante.

Il movimento vibratorio sulla superficie del suolo, risultante dalla sovrapposizione delle onde associate (23), (23') sarà dato dalle componenti

$$(24) \qquad \begin{aligned} u_0 &= \left[\frac{1}{2\alpha_1 \operatorname{tg} \theta_a} + \frac{\operatorname{tg} \theta_b}{\alpha_2(1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b)}\right] \Psi(x - \mathrm{V}t) \\ w_0 &= \left[\frac{1}{2\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2(1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b)}\right] \Psi(x - \mathrm{V}t) \end{aligned}$$

e rappresenta quindi un movimento vibratorio arbitrario, vincolato alla sola condizione di propagarsi in superficie colla velocità V, e di mantenere una inclinazione costante, sulla direzione di propagazione.

Possiamo anche determinare α_1, α_2 in modo che l'ampiezza di queste componenti di oscillazione abbia valori assegnati, conformi a quelli osservati effettivamente. Una delle difficoltà che si presentano rispetto alle onde di Rayleigh è appunto il fatto che il rapporto della componente verticale alla orizzontale nella direzione di propagazione risulta determinato, e uguale perciò ad un numero fisso che non sempre concorda colle osservazioni [1]. Nelle formole precedenti questo rapporto può avere qualsiasi valore, e può essere determinato con opportuna scelta del rapporto $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Si ha infatti

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{u_0}{w_0}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta_a}}{\dfrac{u_0}{w_0}+\operatorname{tg}\theta_b}\,(1-\operatorname{tg}^2\theta_b)\,. \tag{25}$$

Può considerarsi con ciò esaurito il problema della rappresentazione analitica di una coppia qualsiasi di onde associate, corrispondenti ad una radice dell'equazione di Rayleigh per cui risultino reali i valori di $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$, a cui corrispondono cioè angoli reali di emergenza.

Studierò in una Nota successiva le onde che corrispondono alla radice η_3 (minore della unità) dell'equazione di Rayleigh, e dimostrerò che esse costituiscono una generalizzazione delle così dette onde superficiali di Rayleigh. In seguito discuterò della possibilità di applicare i risultati ottenuti ad una interpretazione meccanica delle oscillazioni sismiche, secondo i concetti che ho sommariamente esposti da principio.

Meccanica. — *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*. Nota del Socio T. Levi-Civita.

Nella presente Nota, dopo aver richiamato, per comodo del lettore, l'idea direttiva e l'impostazione matematica della relatività generale, mostro come alcune identità (fra le derivate dei simboli di Riemann) scoperte dal Bianchi offrano un sicuro criterio per introdurre il così detto tensore gravitazionale. Sotto l'aspetto analitico si tratta di un sistema doppio simmetrico A_{ik} $(i, k=0, 1, 2, 3)$, i cui dieci elementi caratterizzano completamente il contributo della gravitazione nel comportamento meccanico locale, individuando sì gli sforzi specifici che il flusso e la densità di energia (di origine gravitazionale). Il significato meccanico del sistema implica una struttura analitica dotata di convenienti proprietà invariantive di fronte ad eventuali

[1] Cfr. Love, *Some Problems of Geodynamics*, Ch. XI, n. 160, 161.