ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

le (b) non possono essere soddisfatte per x arbitrario perchè $\iota c'$ e ιc sono indipendenti da x; la (a) equivale ad

$$(a\,;b)\,x = (a'\,;b')\,x \quad \text{e} \quad c = c'\,,$$

cioè, per la condizione già nota (cfr. loc. cit.) di identità di due coppie, ad

$$a = a' \quad \text{e} \quad b = b' \quad \text{e} \quad c = c'$$

come si era affermato.

Nelle definizioni (1), (2), ... compariscono *implicitamente* le potenze dell'operatore logico ι che nella precedente forma di definizione (¹) comparivano esplicitamente. Giova notare che con le (1), (2), ... gli enti $(a\,;b\,;c)$, $(a\,;b\,;c\,;d)$, ... vengono definiti senza distinguere i casi che due o più degli elementi siano eguali, come è necessario fare per le coppie e come era stato fatto con la precedente definizione di *terna*, ... È ovvio che le due specie di definizioni dànno ad $(a\,;b\,;c)$, ... significati diversi; sceltane una, l'altra non è ammissibile. Del resto la definizione ha come unico scopo di stabilire che *coppia*, *terna*, ... sono nomi di classi e che valgono le (1'), (2'), ...

Risulta che, ad es., $(a\,;b\,;c)$ è *funzione* della coppia $((a\,;b)\,;c)$ ma *non* è identica a tale coppia; l'identità *non* è ammissibile, la funzione *si* purchè sussista la (1').

Fisica matematica. — *Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un sottile anello conduttore.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il Levi-Civita alcuni anni or sono si occupò (²) della attrazione newtoniana di un tubo sottile (nel quale cioè le sezioni trasversali hanno dimensioni piccole di fronte alla lunghezza del tubo), e riuscì ad assegnare, in forma notevolmente semplice, la risultante delle azioni newtoniane che una fetta elementare (porzione di tubo compresa tra due sezioni trasversali infinitamente vicine) subisce da parte di tutto il rimanente tubo, istituendo infine notevoli e varie applicazioni (³).

(¹) Nella pag. 206, 8ª linea dal basso della seconda Nota bisogna correggere un errore di stampa; ad $\iota a \cup \iota b \cup \iota c$ si deve sostituire $\iota a \cup \iota b \cup \iota\iota c$.

(²) *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile.* [Questi Rendiconti vol. XVII (1908), pp. 413-420, 535-551].

(³) *Sulla gravitazione di un tubo sottile con applicazione all'anello di Saturno* [Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, vol. XXXIII (1912), pp. 354-374]; *Sulle azioni meccaniche dovute ad un flusso filiforme di elettricità* [questi Rendiconti, vol. XVIII (1909), pp. 41-50]; *Teoria asintotica delle radiazioni elettriche* [questi Rendiconti. vol. XVIII (1909), pp. 83-93].

Le eleganti formole stabilite da Levi-Civita si prestano assai bene, e nel modo più spontaneo, alla risoluzione del problema elettrostatico che è titolo e oggetto della presente Nota.

La configurazione geometrica dell'anello si può immaginare determinata dal movimento di una sezione trasversale piana τ, la quale pur variando (in modo continuo e mantenendosi piana) si conserva normale alla linea chiusa l descritta da un suo punto generico (p. es. il baricentro); la linea l definisce l'andamento longitudinale dell'anello.

La qualifica *sottile* sta a significare che le dimensioni di τ sono ovunque piccole di fronte alle dimensioni longitudinali (con che si intende non solo rispetto alla lunghezza di l, ma anche rispetto al raggio di curvatura in un suo punto generico); p. es. se τ è un cerchio di raggio costante a e la direttrice l è una circonferenza di raggio b, l'anello è un toro circolare, sottile se a è piccolo di fronte a b.

Ciò premesso, sieno: e la quantità di elettricità in equilibrio sull'anello conduttore, supposto isolato; $\nu\, ds$ la quantità di elettricità contenuta sopra un pezzo, della superficie σ dell'anello, compresa tra due sezioni trasversali piane τ e τ' che limitano una fetta di spessore ds del conduttore. Allora ν — densità elettrica corrispondente alla sezione τ dell'anello — rimane definita dalla seguente formola

$$\text{(I)} \qquad \nu = \frac{e}{\sqrt{k}\int_l \frac{ds}{\sqrt{k}}},$$

dove

$$k = \frac{1}{\tau^2}\int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \log\frac{l}{\mathrm{PP}_0},$$

denotando l la lunghezza della direttrice designata finora colla stessa lettera, P e P_0 due generici punti di τ, $d\tau$ e $d\tau_0$ due elementi di τ ad essi attigui. La quantità k è un puro numero, che dipende, per un assegnato anello, soltanto dalla sezione τ cui si riferisce; essa è, in generale, variabile da sezione a sezione, cioè è funzione dell'arco s della direttrice l, contato a partire da un'origine arbitraria. In particolare, se si tratta di sezioni circolari di raggio a, è

$$k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log\frac{l^2}{a^2} \ (^1).$$

La formola (I) mette in rilievo che la densità elettrica ν è indipendente dai caratteri geometrici della direttrice. Influiscono invece questi sulla risultante delle forze elettriche di una generica sezione τ: detto O il punto

(1) Cfr. Levi-Civita, *Sulla gravitazione* ecc., loc. cit., pag. 362.

comune ad l e a τ, si trova che detta risultante, diretta secondo la normale principale in O alla direttrice l (verso la concavità), ha un' intensità Φ proporzionale alla curvatura c di l in O e precisamente

$$\Phi = \frac{e^2 c}{\left(\int_l \frac{ds}{\sqrt{k}}\right)^2}. \tag{II}$$

Se, in particolare, le sezioni trasversali τ sono tutte eguali, k è costante e la (I) e la (II) divengono rispettivamente

$$\nu = \frac{e}{l} \quad , \quad \Phi = \frac{k e^2 c}{l^2},$$

dalle quali si desume che l'elettricità è uniformemente distribuita tra le sezioni trasversali, mentre il valore della risultante delle forze elettriche varia da sezione a sezione colla curvatura della direttrice.

Va notato che queste conclusioni hanno un carattere « assintotico », cioè tendono a differire tanto meno dal carattere rigoroso quanto più sottile è l'anello conduttore.

1. La giustificazione delle conclusioni testè esposte è immediata.

Si consideri infatti per un momento l'anello costituito da masse quali si sieno. Sia $\boldsymbol{\Phi}\, ds$ la risultante delle azioni newtoniane subìte da una fetta elementare di spessore ds (compresa tra una sezione τ e una sezione vicinissima), da parte di tutto l'anello; se $\nu\, ds$ è la quantità di materia localizzata nella fetta, e se $\mathbf{t}$ è il vettore unitario diretto secondo la tangente in O a l (nel senso delle s crescenti), e $\mathbf{n}$ quello diretto secondo la normale principale (nel verso della concavità) si ha [1]

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{d(\nu^2 k)}{ds}\,\mathbf{t} + \nu^2 k c\,\mathbf{n}. \tag{1}$$

Si supponga trattarsi di masse elettriche; allora sono nulle le forze elettriche nei punti interni dell'anello, mentre sulla sua superficie σ — superficie di livello — le forze elettriche sono dirette normalmente ai singoli elementi superficiali ai quali si riferiscono; ne consegue

$$\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{t} = 0.$$

Per questa dalla (1) scende

$$\nu^2 k = \text{costante}, \tag{2}$$

[1] Cfr. Levi-Civita, *Sulla gravitazione*, ecc., loc. cit., pag. 364.

e la (1) stessa si cangia nella seguente

$$\Phi = \nu^2 k c \mathbf{n} . \tag{3}$$

La costante che compare nel secondo membro della (2) va determinata in modo che la carica totale del conduttore risulti eguale a quella, che si suppone prefissata. Detta e tale carica, si deve avere

$$\int_l \nu \, ds = e ;$$

la quale condizione è soddisfatta se per la costante accennata si assume il quadrato di

$$\frac{e}{\int_l \frac{ds}{\sqrt{k}}} ,$$

con che dalla (2) e dalla (3) si ha in definitiva

$$\nu = \frac{e}{\sqrt{k} \int_l \frac{ds}{\sqrt{k}}} , \quad \Phi = \frac{e^2 c}{\left(\int_l \frac{ds}{\sqrt{k}} \right)^2} \mathbf{n} .$$

Matematica. — *Sulla probabilità come limite della frequenza.* Nota di F. P. Cantelli, presentata dal Corrisp. G. Castelnuovo.

1. Per accennare rapidamente allo scopo di questa Nota, comincio col ricorrere al solito schema dell' urna, contenente palline bianche e palline nere, che serve ad illustrare il noto teorema di Bernoulli.

Supponendo che estratta una pallina questa si rimetta nell' urna, dopo averne osservato il colore, conveniamo che, in *ogni prova*, sia costantemente eguale a p la probabilità di estrarre pallina bianca e quindi eguale a $1 - p = q$ la probabilità di estrarre pallina nera.

Se si procede a delle estrazioni *successive* nel modo anzidetto, e se si indica con b_k il numero delle volte che, in k estrazioni, si sarà presentata pallina bianca, si realizzerà, in s prove, la successione di frequenze

$$\frac{b_1}{1} , \frac{b_2}{2} , \ldots , \frac{b_s}{s} . \tag{1}$$

La questione qui studiata riguarda l'ammissione fatta da qualche autore [1], che la successione (1) al crescere di s, si comporta come se ten-

[1] Cfr. H. Bruns, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre* (B. Teubner, Leipzig und Berlin 1906), pp. 13, 14. R. de Montessus, *Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités* (Gauthier Villars, Paris 1908), pp. 1-7, 15-18. Tullio Bagni, *Teoria matematica dei fenomeni collettivi* (G. Barbera, Firenze 1915), pp. X-XII.