ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

condizione di propagarsi in superficie colla velocità V, e di mantenere una inclinazione costante, sulla direzione di propagazione.

Possiamo anche determinare α_1, α_2 in modo che l'ampiezza di queste componenti di oscillazione abbia valori assegnati, conformi a quelli osservati effettivamente. Una delle difficoltà che si presentano rispetto alle onde di Rayleigh è appunto il fatto che il rapporto della componente verticale alla orizzontale nella direzione di propagazione risulta determinato, e uguale perciò ad un numero fisso che non sempre concorda colle osservazioni [1]. Nelle formole precedenti questo rapporto può avere qualsiasi valore, e può essere determinato con opportuna scelta del rapporto $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Si ha infatti

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{u_0}{w_0} - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta_a}}{\frac{u_0}{w_0} + \operatorname{tg}\theta_b} (1 - \operatorname{tg}^2\theta_b) . \tag{25}$$

Può considerarsi con ciò esaurito il problema della rappresentazione analitica di una coppia qualsiasi di onde associate, corrispondenti ad una radice dell'equazione di Rayleigh per cui risultino reali i valori di $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$, a cui corrispondono cioè angoli reali di emergenza.

Studierò in una Nota successiva le onde che corrispondono alla radice η_3 (minore della unità) dell'equazione di Rayleigh, e dimostrerò che esse costituiscono una generalizzazione delle così dette onde superficiali di Rayleigh. In seguito discuterò della possibilità di applicare i risultati ottenuti ad una interpretazione meccanica delle oscillazioni sismiche, secondo i concetti che ho sommariamente esposti da principio.

Meccanica. — *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Nella presente Nota, dopo aver richiamato, per comodo del lettore, l'idea direttiva e l'impostazione matematica della relatività generale, mostro come alcune identità (fra le derivate dei simboli di Riemann) scoperte dal Bianchi offrano un sicuro criterio per introdurre il così detto tensore gravitazionale. Sotto l'aspetto analitico si tratta di un sistema doppio simmetrico A_{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$, i cui dieci elementi caratterizzano completamente il contributo della gravitazione nel comportamento meccanico locale, individuando sì gli sforzi specifici che il flusso e la densità di energia (di origine gravitazionale). Il significato meccanico del sistema implica una struttura analitica dotata di convenienti proprietà invariantive di fronte ad eventuali

[1] Cfr. Love, *Some Problems of Geodynamics*, Ch. XI, n. 160, 161.

trasformazioni di coordinate. Tale è in effetti la forma (covariante) delle A_{ik} fornita dal criterio suaccennato, la quale inoltre dà luogo ad una estensione particolarmente espressiva del principio di d'Alembert.

L'idea di un tensore gravitazionale fa parte della grandiosa costruzione di Einstein. Però la definizione propostane dall'Autore non può risguardarsi definitiva. Anzi tutto, dal punto di vista matematico, le fa difetto quel carattere invariantivo che dovrebbe invece necessariamente competerle secondo lo spirito della relatività generale. E anche più grave è il fatto, avvertito con fine intuito dallo stesso Einstein [1], che se ne trae una conseguenza fisica palesemente inaccettabile a proposito delle onde di gravitazione. Per questo punto egli trova tuttavia un accomodamento nella teoria dei quanti.

In verità la spiegazione è meno riposta: tutto dipende dalla non corretta forma assunta per il tensore gravitazionale. Vedremo che colla nostra determinazione scompare automaticamente ogni possibilità di paradosso.

1. Generalità. — Nella meccanica ordinaria, lo spazio fisico si considera rigorosamente euclideo, e la rappresentazione analitica dei fenomeni è, per così dire, subordinata alla forma differenziale quadratica (ternaria) dl^2 che esprime il quadrato dell'elemento lineare.

Nella teoria della relatività in senso stretto, si seguita a risguardare lo spazio come euclideo; ma le equazioni della meccanica hanno carattere invariantivo, non più rispetto alla forma dl^2, sibbene rispetto ad una forma quadernaria ds^2 che involge anche il tempo t ed ha notoriamente l'espressione

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dl^2 \tag{1}$$

(c costante universale da interpretarsi come velocità della luce nel vuoto).

Ben si intende che, con referenza a coordinate cartesiane, si ha qui ancora

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

Nella relatività generale — nuova e più comprensiva concezione delle leggi naturali, dovuta anch'essa ad Einstein — spazio e tempo non costituiscono una semplice localizzazione, inerte e immutabile, dei fenomeni, ma ne sono affetti e reagiscono per guisa che il ds^2 cambia natura.

Al posto di (1), si ha una forma fondamentale

$$ds^2 = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k , \tag{2}$$

la quale, con opportuna scelta dei parametri x_0, x_1, x_2, x_3, si riduce esat-

[1] *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Ak. der Wiss., 1916, pag. 696.

tamente alla forma (1) nel caso limite in cui manchi qualsiasi azione fisicamente percettibile (presenza o moto di materia, di elettricità, o più generalmente di qualche forma di energia). Di regola, la (2), pur essendo quantitativamente molto prossima al tipo (1), deve ritenersi non data *a priori* ma intrinsecamente definibile in base alle circostanze di fatto. Fra queste figura naturalmente anche la gravitazione universale, cui compete, secondo Einstein, il privilegio di dipendere esclusivamente dai coefficienti g_{ik} (e loro derivate).

Le equazioni tutte della nuova meccanica hanno carattere invariantivo rispetto a quella ben determinata forma (2) che conviene al caso specifico. In questa nuova meccanica la teoria di una data classe di fenomeni comprende necessariamente, accanto a relazioni le quali hanno riscontro nelle precedenti impostazioni (classica e relativistica della prima maniera), ulteriori relazioni destinate a caratterizzare il ds^2. Tali sono le equazioni gravitazionali di Einstein (in numero di 10 come i coefficienti g_{ik}), che considereremo esplicitamente al § 6.

2. Tensore energetico. — La meccanica dei sistemi continui — anche secondo lo schema ordinario — porta a ritenere ben conosciuto un fenomeno meccanico (che si svolge in un certo campo di valori di x, y, z, t), allorquando sono assegnati (in funzione del posto e del tempo) i seguenti elementi: sforzi, quantità di moto, flusso e densità di energia.

Nella meccanica relativistica, il vettore $\mathfrak{q}$, che rappresenta la densità di quantità di moto, è legato al flusso di energia χ dalla relazione

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{c^2}\chi,$$

e conviene far capo all'unico vettore

$$-\mathfrak{f} = c\mathfrak{q} = \frac{1}{c}\chi, \tag{3}$$

che si può risguardare come flusso di energia durante un secondo di luce (intervallo di tempo entro cui la luce percorre l'unità di lunghezza). Notiamo del resto, a scanso di equivoci, che non intendiamo con ciò di fissare l'unità di tempo: essa rimane generica al pari delle altre due unità fondamentali.

Poniamo, per brevità di scrittura,

$$y_0 = ct \quad , \quad y_1 = x \quad , \quad y_2 = y \quad , \quad y_3 = z, \tag{4}$$

e introduciamo, con referenza a queste variabili, un tensore simmetrico T_{ik} così definito: Per $i, k = 1, 2, 3$, T_{ik} è la componente secondo l'asse delle y_k dello sforzo specifico che si esercita sopra un elemento superficiale normale

all'asse delle y_i [1] (o viceversa, scambiando i con k); $T_{io} = T_{oi}$ si identifica colla componente $\mathfrak{f}_i$ del vettore $\mathfrak{f}$; infine T_{oo} è la densità dell'energia.

3. Riferimento a coordinate qualunque. — Se alle y_i si sostituiscono quattro combinazioni (indipendenti) qualisivogliano x_0, x_1, x_2, x_3, la forma

$$ds^2 = c^2 dy_0^2 - (dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2) \tag{1'}$$

assume l'aspetto generale (2). Varranno tuttavia le restrizioni qualitative

$$g_{oo} > 0 \quad , \quad g_{ii} < 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5}$$

ogni qualvolta il parametro x_0 (variando da solo) è atto a rispecchiare la nozione intuitiva di tempo, mentre le rimanenti x_i sono in qualche modo interpretabili come effettive coordinate di spazio.

Ciò ritenuto, *per tensore energetico in coordinate qualunque x_i si intenderà quel sistema covariante doppio T_{ik}, che, riferito alle y, si specifica nel modo indicato.*

Dalle stesse formule di covarianza con cui rimangono definiti i varii elementi del sistema T_{ik}, si desume, per ognuno di essi, una interpretazione in coordinate generali x. E precisamente si trova [2] che:

$\dfrac{T_{ik}}{\sqrt{g_{ii}\, g_{kk}}} = \dfrac{T_{ki}}{\sqrt{g_{ii}\, g_{kk}}}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ rappresenta la componente (ortogonale) secondo la linea x_i (cioè quella su cui varia la sola x_i) dello sforzo che si esercita sopra un elemento superficiale perpendicolare alla linea x_k (o viceversa, scambiando i con k);

$\dfrac{T_{io}}{\sqrt{-g_{oo}\, g_{ii}}} = \dfrac{T_{oi}}{\sqrt{-g_{oo}\, g_{ii}}}$ $(i = 1, 2, 3)$ rappresenta la componente di $\mathfrak{f}$ secondo la linea x_i (in quanto si immagini decomposto il vettore $\mathfrak{f}$ secondo il triedro delle linee coordinate);

infine $\dfrac{T_{oo}}{g_{oo}}$ è la densità di distribuzione della energia nello spazio (x_1, x_2, x_3) [cui si attribuisca la determinazione metrica corrispondente a $-ds^2$ per $dx_0 = 0$].

4. Invariante lineare e divergenza del tensore energetico. — Ci atteniamo al solito simbolismo del calcolo differenziale assoluto. Rappresentiamo perciò con $g^{(ik)}$ gli elementi reciproci ai coefficienti g_{ik}; e con

[1] Colla convenzione (abituale in idrodinamica) che sforzo normale positivo corrisponda a pressione.

[2] Sarebbe fuor di luogo che io mi indugiassi ora sulle modalità di deduzione. Ma mi permetto di rilevare che non occorrono sviluppi materiali, purchè si ricorra ad un opportuno adattamento dei metodi del calcolo differenziale assoluto ai ds^2 indefiniti che conglobano spazio e tempo.

T_{ikl} $(i, k, l = 0, 1, 2, 3)$ il sistema derivato covariante di T_{ik} secondo la forma fondamentale. Pel momento, come già nel precedente §, riterremo che questa sia la (1'), la quale, riferita a coordinate qualunque x, assume l'aspetto generico (2).

Ponendo

$$T = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g^{(ik)}\, T_{ik}, \tag{6}$$

si definisce un invariante, detto appunto *invariante lineare* o *scalare del tensore energetico.*

Si chiama invece *divergenza* dello stesso tensore energetico il sistema covariante semplice (o vettore quadridimensionale)

$$F_i = \sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{(kl)}\, T_{ikl} \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{7}$$

Il significato meccanico della divergenza (come quello di T, che tralascio di rilevare perchè immediato) si rende manifesto, riportandosi alle variabili y. Rispetto a tali variabili, $g^{(ik)} = 0$ $(i \neq k)$, $g^{(00)} = 1$, $g^{(ii)} = -1$ $(i = 1, 2, 3)$, e la derivazione covariante coincide coll'ordinaria.

Si ha quindi

$$F_i = \frac{\partial T_{i0}}{\partial y_0} - \sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial T_{ik}}{\partial y_k} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$F_0 = \frac{\partial T_{00}}{\partial y_0} - \sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial T_{0k}}{\partial y_k}.$$

Teniamo presente il § 2 e notiamo che, in forza della (3), le T_{i0} si identificano con $-c\,q_i$ (q_i componenti della densità di quantità di moto **q**). Con ciò apparisce ovviamente dalle prime tre equazioni testè scritte (riponendovi ct per y_0) che $-F_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sono componenti della forza esterna **F** applicata al sistema (per unità di volume); l'ultima equazione, qualora [sempre in base alle (3)] si prendano le T_{0k} sotto la forma $-\frac{1}{c}\chi_k$ (χ_k componenti del flusso di energia χ), mostra poi che cF_0 è la densità di potenza, cioè l'energia comunicata dall'esterno al sistema per unità di tempo e di volume. Si può anche dire, se si vuole, che F_0 rappresenta l'energia comunicata al sistema, per unità di volume, in un secondo di luce. Ne consegue in particolare che, in un sistema isolato, la divergenza è nulla.

Ove ci si riferisca a coordinate qualunque x_i, il carattere covariante del sistema semplice F_i consente senz'altro di interpretare $\frac{-F_1}{\sqrt{-g_{11}}}$, $\frac{-F_2}{\sqrt{-g_{22}}}$, $\frac{-F_3}{\sqrt{-g_{33}}}$ quali componenti di **F** secondo le linee coordinate x_1, x_2, x_3;

$\frac{F_0}{\sqrt{g_{00}}}$ quale energia ceduta in un secondo di luce all'unità di volume del sistema.

5. Passaggio alla relatività generale. — Pur riferendoci a coordinate generali, abbiamo supposto finora che si tratti di un ds^2 euclideo. Formalmente le cose vanno nello stesso modo anche per un ds^2 essenzialmente irriducibile al tipo (1'), semprechè tuttavia:

a) x_0 sia interpretabile come tempo e le altre tre coordinate come parametri di spazio, valendo in conformità le disuguaglianze (5);

b) si conservino (nell'infinitesimo) le intuizioni meccaniche abituali, sicchè sia possibile attribuire un senso positivo a misure locali di forza, sforzi, flusso e densità di energia. In tali condizioni rimane univocamente definito il tensore energetico pel tramite dei rapporti

$$\frac{T_{ik}}{\sqrt{g_{ii}\,g_{kk}}}\ (i\,,k=1\,,2\,,3)\quad;\quad \frac{T_{0i}}{\sqrt{-g_{00}\,g_{ii}}}\ (i=1\,,2\,,3)\quad;\quad \frac{T_{00}}{g_{00}}\,,$$

di cui al § 3.

D'ora innanzi il nostro ds^2 si intenderà *a priori* qualunque (salvo le restrizioni suindicate); e si assumerà naturalmente lo stesso ds^2 per forma fondamentale.

6. Le equazioni del campo gravitazionale. — Indichino $g_{ij,hk}$ $(i\,,j\,,h\,,k=0\,,1\,,2\,,3)$ i simboli di Riemann di prima specie spettanti ad un generico ds^2 quadernario (2). Attesa la loro covarianza, le posizioni

$$G_{ik}=\sum_{0}^{3}{}_{jh}\, g^{(jh)}\, g_{ij,hk} \qquad (i\,,k=0\,,1\,,2\,,3) \tag{8}$$

definiscono un sistema covariante doppio.

Ove si tengano presenti le formule [1]

$$g_{ij,hk}=\sum_{0}^{3}{}_{\nu}\, g_{j\nu}\,\{i\nu\,.\,hk\}\,,$$

$$\{i\nu\,,hk\}=\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} ih \\ \nu \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix}+\sum_{0}^{3}{}_{l}\left[\begin{Bmatrix} ih \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lk \\ \nu \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lh \\ \nu \end{Bmatrix}\right],$$

che legano i simboli riemanniani di prima a quelli di seconda specie, e questi ai simboli di Christoffel (pure di seconda specie), si riconosce immediatamente che le (8) equivalgono a

$$G_{ik}=\sum_{0}^{3}{}_{h}\,\{ih\,,hk\}= \tag{8'}$$
$$=\sum_{0}^{3}{}_{h}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} ih \\ h \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} ik \\ h \end{Bmatrix}\right]+\sum_{0}^{3}{}_{hl}\left[\begin{Bmatrix} ih \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} kl \\ h \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lh \\ h \end{Bmatrix}\right].$$

[1] Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pag. 72.

L'invariante lineare del sistema doppio G_{ik}

$$G = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g^{(ik)}\, G_{ik} \tag{9}$$

si dirà *curvatura media* del nostro ds^2 (¹).

Ciò posto, le equazioni gravitazionali di Einstein sono:

$$G_{ik} - \tfrac{1}{2}\, g_{ik}\, G = -\varkappa T_{ik}\,, \tag{10}$$

dove $\varkappa$ dipende dalla costante f di attrazione universale e da c a norma della formula

$$\varkappa = \frac{8\pi f}{c^4}\,. \tag{11}$$

Osservo incidentalmente che si può verificare l'omogeneità dei due membri delle (10), immaginando di riferirsi a parametri x_0, x_1, x_2, x_3 tutti omogenei tra loro, per es. lunghezze, come sono (pei ds^2 euclidei) le y definite dalle posizioni (4). I coefficienti g_{ik} sono allora dei puri numeri, e i primi membri hanno manifestamente le dimensioni l^{-2}. D'altra parte tutti i T_{ik} (sforzi specifici a meno di fattori numerici, ecc.) hanno in questo caso le stesse dimensioni, e precisamente $ml^{-1}t^{-2}$. Si ha poi

$$[f] = m^{-1} l^3 t^{-2} \quad , \quad [\varkappa] = m^{-1} l^{-1} t^2\,,$$

sicchè anche ai secondi membri spettano effettivamente le dimensioni l^{-2}.

7. Giustificazione formale desunta dalle identità di Bianchi. — Le derivate covarianti dei simboli di Riemann sono legate da relazioni notevolissime dovute al Bianchi (²), che si possono compendiare nella formula

$$g_{ij,hkl} + g_{jl,hki} + g_{li,hkj} = 0 \qquad (i, j, h, k, l = 0, 1, 2, 3),$$

ovvero, per ben note proprietà dei simboli di Riemann, nella formula equivalente

$$g_{ij,hkl} + g_{il,khj} - g_{lj,hki} = 0\,.$$

Moltiplichiamo per $\frac{1}{2} g^{(kl)} g^{(jh)}$ e sommiamo rispetto a k, l, j, h, avendo cura di scambiare nel secondo termine (a somma eseguita) j con l e h con k. Questo secondo termine diviene così identico al primo, e risulta

$$\sum_{0}^{3}{}_{kljh}\, g^{(kl)} g^{(jh)} g_{ij,hkl} - \frac{1}{2} \sum_{0}^{3}{}_{kljh}\, g^{(kl)} g^{(jh)} g_{lj,hki} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

D'altra parte la derivazione covariante delle (8) — ricordando il lemma

(¹) Tale designazione è ovviamente desunta dal significato geometrico che spetterebbe a G, qualora si trattasse di un ds^2 definito positivo.

(²) Cfr. loc. cit., pag. 351.

di Ricci che i coefficienti della forma fondamentale hanno derivata covariante nulla — porge

$$G_{ikl} = \sum_{0}^{3}{}_{jh}\, g^{(jh)}\, g_{ij,hkl}\,;$$

mentre, dalla espressione (9) di G, che può essere scritta

$$G = \sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{(kl)}\, G_{lk}\,,$$

derivando covariantemente, si trae

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = G_i = \sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{(kl)}\, G_{lki} = \sum_{0}^{3}{}_{kljh}\, g^{(kl)}\, g^{(jh)}\, g_{lj,hki}\,.$$

Le ricavate combinazioni delle identità di Bianchi divengono con ciò

$$\sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{(kl)}\, G_{ikl} - \frac{1}{2}\, G_i = 0 \qquad (i = 0\,,1\,,2\,,3)\,. \tag{12}$$

Esse contengono la giustificazione delle equazioni gravitazionali (10), dal lato matematico. Ed ecco perchè. I secondi membri delle (10) costituiscono un sistema doppio a divergenza nulla [1]. Se si richiede che il sistema (10) sia completo [cioè che nessuna condizione sia imposta al ds^2 indipendentemente dalle circostanze esteriori riassunte nelle T_{ik}], bisogna che sia identicamente nulla anche la divergenza dei primi membri, ossia del sistema

$$G_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik}\, G\,.$$

Questo appunto esprimono le equazioni (12).

8. Tensore gravitazionale o inerziale – Generalizzazione del principio di d'Alembert. — Posto per brevità

$$A_{ik} = \frac{1}{\varkappa}\left\{ G_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik}\, G \right\}, \tag{13}$$

le equazioni gravitazionali (10) si scrivono

$$T_{ik} + A_{ik} = 0 \qquad (i\,,k = 0\,,1\,,2\,,3) \tag{10'}$$

[1] Infatti le T_{ik} includono il contributo di tutti i fenomeni che si svolgono nel posto e nell'istante considerato (gravitazione a parte). Si tratta comunque di un sistema isolato nel senso ordinario della parola. Debbono perciò annullarsi, per ogni sua porzione elementare, forza e potenza.

Interpretiamovi le A_{ik} come componenti di un tensore energetico dovuto all'ambiente spaziale e temporale, cioè dipendente esclusivamente dai coefficienti del ds^2. Un tale tensore si potrà a egual titolo denominare *gravitazionale* oppure *inerziale* [1], poichè dal ds^2 dipendono simultaneamente gravitazione ed inerzia. Le (10′) dànno luogo in conformità al seguente enunciato:

La natura del ds^2 è sempre tale da equilibrare ogni azione meccanica, nel senso che si annulla identicamente la somma dei due tensori energetico ed inerziale.

Vien fatto naturalmente di riavvicinare un tale enunciato al principio di d'Alembert « le forze perdute (cioè forze direttamente applicate e forze di inerzia) si fanno equilibrio ». L'equilibrio espresso dalle (10′) è proprio ciò che si può concepire di più completo sotto l'aspetto meccanico, venendo ad annullarsi non soltanto la forza totale applicata ad ogni singolo elemento, ma altresì (col tener conto dell'inerzia pel tramite delle A_{ik}) sforzi, flusso e densità di energia.

Ben si intende che questa assenza assoluta di entità meccaniche concerne i sistemi isolati. Se nel campo di un tale sistema si introduce ad esempio un po' di materia (e si suppone per semplicità trascurabile la conseguente modificazione del campo), si ha sulla materia addizionale un complesso di azioni esterne provenienti dal sistema. Nel caso schematico del punto materiale, queste si riassumono in una legge di moto (geodetica rispetto al ds^2 quadridimensionale), che include in particolare l'ordinaria dinamica di un punto sottoposto a forze conservative.

Va notato che le equazioni fondamentali di Einstein, qui riattaccate al principio di d'Alembert, furono già, da Einstein stesso e, in modo più completo, da Lorentz e da Hilbert [2], fatte discendere dalla variazione (debitamente intesa) di un unico integrale, rimanendo così esteso alla nuova meccanica anche il principio di Hamilton.

9. Equivoco di Einstein concernente il tensore gravitazionale. — Ricordo, per quanto possa essere superfluo, che da ogni sistema covariante doppio A_{ik} si ottiene immediatamente un sistema misto $A_i^{(j)}$ (covariante rispetto all'indice i e contravariante rispetto all'indice j), ponendo

$$A_i^{(j)} = \sum_{0}^{3}{}_k \, g^{(jk)} A_{ik} \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3).$$

Ne consegue che, per individuare il tensore gravitazionale con referenza a

(1) Cfr. per es. W. De Sitter, *On the relativity of rotation in Einstein's theory*, Proc. of K. Ak. van Wet. te Amsterdam, vol. XIX, 1916, pag. 530 (in nota).

(2) Cfr. per es. le pp. 707-709 del rapporto di De Sitter, *On Einstein's theory of gravitation.....*, Monthly Notices, vol. LXXVI, 1916.

determinate variabili, è indifferente assegnare gli elementi A_{ik} ovvero le loro combinazioni lineari $A_i^{(j)}$. Ciò premesso, veniamo alle espressioni esplicite proposte da Einstein [1] per le $A_i^{(j)}$ e da lui designate con $\sqrt{-g}\, t_i^j$ (g discriminante del ds^2).

Esse sono

$$(14) \qquad \sqrt{-g}\, t_i^j = \frac{1}{2}\left\{ G^\star \varepsilon_{ij} - \mathop{S}_{0}^{3}{}_{hk} \frac{\partial G^\star}{\partial g_j^{(hk)}} g_i^{(hk)} \right\} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3),$$

dove ε_{ij} rappresenta al solito lo zero o l'unità secondochè i due indici sono distinti o coincidono; $g_j^{(hk)}$ sta per $\frac{\partial g^{(hk)}}{\partial x_j}$; il sommatorio $\mathop{S}_{0}^{3}{}_{hk}$ va esteso a tutte le combinazioni con ripetizione degli indici h e k; infine la funzione

$$(15) \qquad G^\star = -\sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g^{(ik)} \sum_{0}^{3}{}_{hl} \left[\begin{Bmatrix} ih \\ l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} kl \\ h \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} lh \\ h \end{Bmatrix} \right]$$

deve intendersi (come è ovviamente lecito) ridotta a dipendere dai soli argomenti $g^{(hk)}$, $g_j^{(hk)}$, prima di sottoporla a derivazione parziale rapporto a questi ultimi.

La inattendibilità delle posizioni (14) dal punto di vista matematico si constata agevolmente. Basta per es. ricavarne l'espressione che dovrebbe avere l'invariante lineare, cioè

$$\sqrt{-g} \sum_{0}^{3}{}_i\, t_i^i = \frac{1}{2}\left\{ 4\, G^\star - \sum_{0}^{3}{}_i \mathop{S}_{0}^{3}{}_{hk} \frac{\partial G^\star}{\partial g_i^{(hk)}} g_i^{(hk)} \right\}.$$

Siccome $G^\star$, a norma della (15) è quadratica omogenea nei simboli di Christoffel e quindi anche nelle $g_i^{(hk)}$, così, in virtù del teorema di Eulero,

$$\sum_{0}^{3}{}_i \mathop{S}_{0}^{3}{}_{hk} \frac{\partial G^\star}{\partial g_i^{(hk)}} g_i^{(hk)} = 2\, G^\star,$$

e *l'invariante in questione dovrebbe ridursi a* $G^\star$.

Ora è ben noto [2] che *non* esistono invarianti differenziali del 1° ordine, intrinseci, cioè formati esclusivamente coi coefficienti del ds^2 e loro derivate prime, come lo è $G^\star$. Tanto basta a rendere, almeno in generale, inammissibile la forma del tensore gravitazionale assunta da Einstein. Questi del

[1] Dapprima con referenza a speciali variabili; allargandone poi la validità; e da ultimo attribuendo loro carattere generale. Cfr. in particolare la recente Nota: *Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Ak. der Wiss., 1916, pp. 1111-1116.

[2] Veggasi ad es. Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Mathematische Annalen, B. 54, 1900, pag. 162.

resto già ne aveva risentito un qualche disagio, specie quando [1], dopo avere con geniale semplicità tratteggiata la teoria delle onde gravitazionali, fu condotto al risultato inattendibile che anche onde *spontanee* dovrebbero di regola dar luogo a dispersione di energia per irraggiamento.

« Siccome questo — sono sue parole — non dovrebbe presentarsi « in natura, così appare verosimile che intervenga la teoria dei quanti a « modificare non soltanto l'elettrodinamica di Maxwell, ma anche la nuova « teoria della gravitazione ».

In realtà non c'è bisogno di arrivare ai quanti. Basta correggere l'espressione formale del tensore gravitazionale nel modo qui esposto. Rimane allora *a priori* esclusa l'eventualità di imbattersi in conseguenze non rispondenti alla intuizione fisica, sia che si tratti di onde libere o d'altro fenomeno *puramente* gravitazionale. Infatti, a norma delle (10'), o, se si vuole, del principio di d'Alembert generalizzato, quando si annulla il tensore energetico T_{ik}, lo stesso deve avvenire per il tensore gravitazionale A_{ik}, il che implica assoluta assenza sì di sforzi, che di flusso, o anche di semplice localizzazione dell'energia.

Astronomia. – *Osservazioni della nuova cometa Mellish* ≡ 1917 *a*. Nota del Socio E. Millosevich.

Sembra che l'astro sia stato scoperto dal sig. Mellish, Yerkes Observatory, Williams Bay, probabilmente il 20 marzo.

Una piccola efemeride, calcolata a Copenaghen, sopra elementi difettosi è di grossolana approssimazione.

L'astro è lucente; il nucleo è fra 6ta e 7ma grandezza, la testa misura circa 0',6 e designasi una lieve codetta; suppongo che possa diventare un bell'oggetto, ma nulla devesi congetturare senza la conoscenza pur approssimata delle distanze.

Io trovai l'astro il 25, e feci le seguenti quattro posizioni:

	t. m. R. C. R.	α app	δ app.	Stelle di riferimento
	h m s	h m s	° ′ ″	
1917 marzo 25	7 36 19	2 6 45.28 (9.656) ;	+ 16 3 38.0 (0.737)	1
» » 27	7 4 25	2 4 38.13 (9.651) ;	+ 16 44 26.6 (0.721)	2
» » 29	6 58 53	2 1 40.23 (9.655) ;	+ 17 23 26.7 (0.721)	3
» » 30	7 9 1	1 59 45.26 (9.659) ;	+ 17 41 30.7 (0.732)	4

[1] Nella Nota già citata al principio.