ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

e la (1) stessa si cangia nella seguente

$$\Phi = \nu^2 k c \mathbf{n}. \tag{3}$$

La costante che compare nel secondo membro della (2) va determinata in modo che la carica totale del conduttore risulti eguale a quella, che si suppone prefissata. Detta e tale carica, si deve avere

$$\int_l \nu \, ds = e ;$$

la quale condizione è soddisfatta se per la costante accennata si assume il quadrato di

$$\frac{e}{\int_l \frac{ds}{\sqrt{k}}},$$

con che dalla (2) e dalla (3) si ha in definitiva

$$\nu = \frac{e}{\sqrt{k} \int_l \frac{ds}{\sqrt{k}}} , \qquad \Phi = \frac{e^2 c}{\left(\int_l \frac{ds}{\sqrt{k}}\right)^2} \mathbf{n} .$$

Matematica. — *Sulla probabilità come limite della frequenza.* Nota di F. P. Cantelli, presentata dal Corrisp. G. Castelnuovo.

1. Per accennare rapidamente allo scopo di questa Nota, comincio col ricorrere al solito schema dell' urna, contenente palline bianche e palline nere, che serve ad illustrare il noto teorema di Bernoulli.

Supponendo che estratta una pallina questa si rimetta nell' urna, dopo averne osservato il colore, conveniamo che, in *ogni prova*, sia costantemente eguale a p la probabilità di estrarre pallina bianca e quindi eguale a $1 - p = q$ la probabilità di estrarre pallina nera.

Se si procede a delle estrazioni *successive* nel modo anzidetto, e se si indica con b_k il numero delle volte che, in k estrazioni, si sarà presentata pallina bianca, si realizzerà, in s prove, la successione di frequenze

$$\frac{b_1}{1}, \frac{b_2}{2}, \ldots, \frac{b_s}{s}. \tag{1}$$

La questione qui studiata riguarda l'ammissione fatta da qualche autore [1], che la successione (1) al crescere di s, si comporta come se ten-

[1] Cfr. H. Bruns, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre* (B. Teubner, Leipzig und Berlin 1906), pp. 13, 14. R. de Montessus, *Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités* (Gauthier Villars, Paris 1908), pp. 1-7, 15-18. Tullio Bagni, *Teoria matematica dei fenomeni collettivi* (G. Barbera, Firenze 1915), pp. X-XII.

desse al limite p; che, anzi, la probabilità p possa considerarsi come limite della successione (1), quando questa potesse supporsi indefinitamente prolungata.

Ora se, per precisare, si vuol ritenere che la tendenza di cui si parla sia la ordinaria tendenza ad un limite, sorge il dubbio che le fatte ammissioni possano condurre a contraddizioni nel calcolo delle probabilità. Tanto più che se si pensa, ad esempio, che la probabilità, pur supposta determinabile, della ordinaria tendenza della (1) verso p equivale, come è intuitivo e come si vedrà chiaramente in seguito, ad una probabilità relativa al verificarsi di una successione illimitata di *assegnati* eventi, viene legittimo il dubbio che essa possa riuscire infinitesima.

In questa Nota mi occupo appunto della ricerca della probabilità che la (1) tenda a p, col crescere indefinito di s; mi pongo, anzi, da un punto di vista più generale di quello illustrato dal riportato *schema ad urna*.

2. In questo numero indico un teorema che si riferisce alla probabilità della coesistenza di una successione illimitata di eventi. Tale teorema assume, in questo scritto, importanza fondamentale per il collegamento che ne faccio con un altro teorema, che si trova dimostrato in un mio precedente lavoro [2] e che richiamo nel numero successivo; essi permetteranno di argomentare sulla probabilità ricercata.

Cominciamo dal considerare tre eventi compatibili i_1, i_2, i_3 e gli eventi, rispettivamente contrarî ai precedenti, e_1, e_2, e_3.

Indicando con p_α la probabilità che si verifichi un evento α, con $p_{\alpha\beta\gamma}$ la probabilità che si verifichino insieme tre eventi α, β, γ, si ha:

$$(2)\quad p_{i_1e_2e_3} + p_{i_2e_1e_3} + p_{i_3e_1e_2} + p_{e_1i_2i_3} + p_{e_2i_1i_3} + p_{e_3i_1i_2} + p_{i_1i_2i_3} + p_{e_1e_2e_3} = 1$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} p_{e_1i_2i_3} + p_{e_1i_2e_3} + p_{e_1e_2i_3} + p_{e_1e_2e_3} = p_{e_1} \\ p_{e_2i_1i_3} + p_{e_2i_1e_3} + p_{e_2e_1i_3} + p_{e_2e_1e_3} = p_{e_2} \\ p_{e_3i_1i_2} + p_{e_3i_1e_2} + p_{e_3e_1i_2} + p_{e_3e_1e_2} = p_{e_3}\,. \end{array}\right.$$

Ora, se si paragonano la (2) e le (3) si deduce, senza difficoltà,

$$(4)\qquad p_{i_1i_2i_3} \geq 1 - (p_{e_1} + p_{e_2} + p_{e_3})\,.$$

In generale si dimostra che:

La probabilità che si verifichino simultaneamente n eventi compatibili $i_1, i_2, \ldots, i_n$, non è inferiore all'unità diminuita della somma delle

[2] Cfr. *Sulla legge dei grandi numeri*. Memorie della R. Accademia dei Lincei serie 5ª, vol. XI (1916).

probabilità relative al verificarsi di ciascuno degli eventi, rispettivamente contrari ai precedenti, $e_1, e_2, \dots, e_n$ (³).

Si possono considerare delle successioni *illimitate* di eventi. Per una tal successione

$$i_1, i_2, \dots, i_n, \dots, \tag{5}$$

tenendo presente che si ha, per qualunque valore di k,

$$p_{i_1 i_2 \dots i_k} \geq p_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}, \tag{6}$$

si deduce che la successione illimitata di numeri non crescenti

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n}, p_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}}, \dots, p_{i_1 i_2 \dots i_{n+k}}, \dots \tag{7}$$

tende ad un limite l.

Si è così condotti ad assumere questo limite l per *la probabilità della coesistenza di* tutti *gli eventi della successione* (5); ossia per *la probabilità che non esista* alcun *evento, della successione* (5), *il quale non si verifichi.*

Tale assunto non può portare ovviamente ad obbiezioni teoriche e risponde al sentimento che la probabilità, empiricamente considerata, risveglia in noi.

Se *ammettiamo ancora* che la serie

$$p_{e_1} + p_{e_2} + \cdots + p_{e_n} + \cdots \tag{8}$$

sia convergente, risulta, per quanto è stato detto sopra,

$$l \geq 1 - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} p_{e_\alpha}. \tag{9}$$

3. Assumo come note (⁴) le definizioni di *variabile casuale*, di *valore medio di una variabile casuale* nonchè le più semplici operazioni che possono effettuarsi sulle menzionate variabili. Ciò posto, consideriamo una successione illimitata di variabili casuali *indipendenti*, nel senso del calcolo delle probabilità,

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \tag{10}$$

e la successione di variabili casuali *dipendenti*

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}, \dots \tag{11}$$

in cui è

$$X_{(n)} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}. \tag{12}$$

(³) Cfr. G. Boole, *An investigation of the laws of thought* (Macmillan and Co., London 1854), pag. 307.

(⁴) Loc. cit. (²).

Ponendo, allora, quando E sia il simbolo di *valore medio*,

(13) $\quad E(X_n) = M_n \;,\; E(X_n - M_n)^2 = \sigma_{2,n} \;,\; E(X_n - M_n)^4 = \sigma_{4,n} \,,$

è noto come si deduca:

$$(14)\quad \begin{cases} E[X_{(n)}] = \dfrac{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}{n} = M_{(n)}, \\ E[X_{(n)} - M_{(n)}]^2 = \dfrac{\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2} + \cdots + \sigma_{2,n}}{n^2} = \dfrac{\sigma_{2,(n)}}{n}, \\ E[X_{(n)} - M_{(n)}]^4 = \dfrac{1}{n^4}\left[\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{4,i} + 3\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} \sigma_{2,r} \,.\, \sigma_{2,s}\right], \end{cases}$$

essendo, nell'ultima espressione, $r \neq s$.

L'ultima delle (14), quando si ponga

$$(15)\quad \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{4,i}}{n} = \sigma_{4,(n)} \;,\quad \frac{\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} \sigma_{2,r} \,.\, \sigma_{2,s}}{\dfrac{n(n-1)}{2}} = \sigma'_{2,(n)},$$

può anche scriversi:

$$(16)\quad E[X_{(n)} - M_{(n)}]^4 = \frac{\sigma_{4,(n)}}{n^3} + 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sigma'_{2,(n)}}{n^2}\,.$$

Ciò premesso, *supponendo che la successione* $M_{(s)}$, $[s = 1, 2, \ldots]$ *tenda ad un limite* M e posto

$$(17)\quad \lambda_n \,.\, \sqrt[4]{E[X_{(n)} - M_{(n)}]^4} = \alpha_n\,,$$

essendo λ_n un numero positivo, richiamo il seguente caso particolare di un teorema già dimostrato ([5]).

Un confine superiore della probabilità che non sia

$$(18)\quad -\alpha_n - |M_{(n)} - M| \leq M - X_{(n)} \leq \alpha_n + |M_{(n)} - M|$$

è

$$(19)\quad \frac{1}{\lambda_n^4}\,.$$

4. Si consideri la successione illimitata di ineguaglianze:

$$(20)\quad \begin{cases} -\alpha_n - |M_{(n)} - M| \leq M - X_{(n)} \leq \alpha_n + |M_{(n)} - M| \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\alpha_{n+k} - |M_{(n+k)} - M| \leq M - X_{(n+k)} \leq \alpha_{n+k} + |M_{(n+k)} - M| \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

([5]) Loc. cit. ([3]).

e si tengano presenti le formole (16), (17), (19), nonchè il teorema rappresentato dalla (9): Si deduce, senza difficoltà, che *un confine inferiore della probabilità* $l_{(n)}$ *relativa alla coesistenza delle ineguaglianze della successione illimitata* (20), *è dato da*

$$(21) \qquad 1-\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{\sigma_{4,(n+i)}}{\alpha_{n+i}^4\cdot(n+i)^3}-3\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(1-\frac{1}{n+i}\right)\frac{\sigma'_{2,(n+i)}}{\alpha_{n+i}^4\cdot(n+i)^2}$$

se le serie rappresentate dai precedenti sommatori sono convergenti (*).

Ora, se si suppone che $\sigma_{4,(s)}$ e $\sigma'_{2,(s)}$, $[s=1,2,...]$ ammettano rispettivamente i limiti superiori finiti A e B e se si pone

$$(22) \qquad \alpha_{n+s}=\frac{\delta}{(n+s)^{\frac{1}{4}(1-\xi)}},$$

essendo δ e ξ due numeri positivi da determinare opportunamente, si deduce dalla (21):

$$(23) \qquad l_{(n)}>1-\frac{A}{\delta^4}\left(\frac{1}{n^{2+\xi}}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^{2+\xi}}+\cdots\right)- \\ -3\frac{B}{\delta^4}\left(\frac{1}{n^{1+\xi}}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^{1+\xi}}+\cdots\right).$$

Perchè le serie che figurano nella (23) siano convergenti bisogna che sia $\xi>0$, e se è $\xi<1$ sarà anche

$$(24) \qquad \lim_{s\to\infty}\alpha_{n+s}=0,$$

la quale condizione si renderà utile nel numero seguente.

Ancora, quando si tenga presente che si ha per $s>1$, come è facile dimostrare,

$$(25) \qquad \frac{1}{n^s}+\frac{1}{(n+1)^s}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^s}+\cdots<\frac{2^{s-1}}{2^s-1}\cdot\frac{1}{n^{s-1}}$$

si può scrivere, invece della (23),

$$(26) \qquad l_{(n)}>1-\frac{A}{\delta^4}\,\frac{2^{1+\xi}}{2^{1+\xi}-1}\,\frac{1}{n^{1+\xi}}-3\,\frac{B}{\delta^4}\,\frac{2^{\xi}}{2^{\xi}-1}\cdot\frac{1}{n^{\xi}}.$$

5. Nelle ipotesi fatte, e quando sia pure $0<\xi<1$, è stato precedentemente dimostrato che si ha una probabilità fornita dalla (26) che le variabili casuali della successione illimitata

$$(27) \qquad M-X_{(n)},\ M-X_{(n+1)},\ \dots,\ M-X_{(n+k)},\ \dots,$$

(*) È da osservare che la nota *legge dei grandi numeri* si deduce dalla probabilità relativa alla prima soltanto delle (20), *prescindendo* dalla ***coesistenza*** di quest' ultima con tutte le ineguaglianze successive.

simultaneamente considerate, assumano rispettivamente valori di intervalli la cui misura tende a zero.

E poichè si ha, per la (26) stessa,

$$\lim_{n \to \infty} l_{(n)} = 1 \tag{28}$$

si può concludere, senza difficoltà, che *è prossima all'unità quanto si vuole la probabilità che le variabili casuali della successione*

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}, \ldots \tag{29}$$

assumano valori che tendano, nel senso ordinario, al limite M (*).

6. Applico il teorema generale, precedentemente dimostrato, al caso particolare di cui al n. 1. In base ai simboli sin qui adoperati, questo caso equivale a supporre che la X_n sia una variabile casuale che possa assumere il valore 1 con probabilità p e il valore 0 con probabilità $q = 1 - p$, e si ha:

$$\left\{\begin{array}{ll} E(X_n) = p, & E[X_{(n)}] = p, \\ E(X_n - p)^2 = pq, & E[X_{(n)} - p]^2 = \dfrac{pq}{n}, \\ E(X_n - p)^4 = pq - 3p^2q^2, & E[X_{(n)} - p]^4 = 3\dfrac{p^2q^2}{n^2} + \dfrac{pq}{n^3} - \dfrac{6p^2q^2}{n^3}, \\ A = pq - 3p^2q^2, & B = p^2q^2. \end{array}\right. \tag{30}$$

Quando si faccia poi, ad es., $\xi = \frac{1}{2}$, e quindi

$$\alpha_{n+s} = \frac{\delta}{(n+s)^{\frac{1}{8}}} = \left(\frac{n}{n+s}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot \alpha_n, \tag{31}$$

(*) Interessa osservare che, se invece di basare la ricerca sulle (18), (19) essa fosse stata basata sul noto teorema di Bienaymé-Tchebychef, oppure sull'espressione integrale della probabilità (Laplace) completata da un confine superiore dell'errore (A. Liapounoff), le serie da studiare sarebbero riuscite divergenti. D'altra parte può pervenirsi a confini inferiori della probabilità $l_{(n)}$ più convenienti di quelli qui ottenuti, basandosi su teoremi che ho altrove dimostrato [6], confini dei quali qui non mi occupo per necessità di spazio. Nel caso particolare di cui mi occupo al numero seguente, pure con lo scopo di rilevare la portata della (26), può anche pervenirsi a risultati più convenienti usufruendo, insieme con le considerazioni di cui al n. 2, di teoremi, dovuti a De la Vallée-Poussin e a P. Mansion, dei quali sono date indicazioni nelle citate *Leçons* di R. de Montessus.

(6) *Intorno ad un teorema fondamentale della teoria del rischio* (Bollettino dell'Associazione degli Attuari, n. 24, Milano 1911).

risulta, in base alla (26), per la probabilità $l_{(n)}$, relativa alla coesistenza delle ineguaglianze della successione illimitata

$$(32)\qquad \begin{cases} p-\alpha_n \leq \mathrm{X}_{(n)} \leq p+\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p-\left(\dfrac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{8}}\cdot\alpha_n \leq \mathrm{X}_{(n+k)} \leq p+\left(\dfrac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{8}}\cdot\alpha_n\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

che corrispondono alle (20),

$$(33)\qquad l_{(n)} > 1-\frac{pq}{\alpha_n^4\,.\,n}\left(1{,}55\,\frac{1-3pq}{n}+10{,}26\,pq\right).$$

Posto $p=\frac{1}{2}$, $\alpha_n=0{,}5$, $n=100$, risulta $l_{(n)}>0{,}897$; posto $p=\frac{1}{2}$, $\alpha_n=0{,}01$, $n=1.000.000.000$, risulta $l_{(n)}>0{,}993$.

7. Con linguaggio fisico è lecito dire che la successione (1) del n. 1, al crescere di s, *tende* al limite p; ma per scrivere, nel senso dell'analisi,

$$\lim_{s\to\infty}\frac{b_s}{s}=p\,,$$

rimangono, dal punto di vista logico, delle lacune impossibili ad essere colmate, sulla qualcosa avrò occasione di ritornare.

Matematica. — *Sur la composition de 1ère espèce: Les fonctions d'ordre quelconque et leur composition.* Nota I di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

§ 1. — INTRODUCTION.

La théorie de la composition et de la permutabilité de première espèce a d'abord été développée pour les fonctions d'ordre entier positif. Dans un récent Mémoire [1] qui étend considérablement le champ d'application de cette théorie, M.r Volterra envisage d'abord des fonctions d'ordre positif quelconque qui se composent comme des fonctions d'ordre entier. Il définit ensuite, f étant une fonction d'ordre positif, des symboles tels que $\overset{*}{f}{}^{0}$ et $\overset{*}{f}{}^{-1}$ qui peuvent être considérés comme fonctions d'ordre nul et négatif, et con-

[1] *Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione.* Atti della R. Acc. dei Lincei, serie 5a, vol. XI, fasc. IV.