ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Solution d'un problème remarquable relatif à la nouvelle Table de diviseurs des nombres.* Nota di ERNESTO LEBON, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Soient

$$B = 30\,030 \quad \text{et} \quad B^2 = 901\,800\,900$$

la base adoptée et la limite des nombres dont la *nouvelle Table* donne la composition.

Lorsque l'on divise par B un nombre N premier avec B, on obtient un quotient par défaut α, appelé *caractéristique*, et un reste par défaut I, appelé *indicateur*, de sorte que

$$(1) \qquad N = B\alpha + I, \quad \text{ou} \quad N = (\alpha\,; I)$$

en prenant B pour base du système de numération.

Si l'on prend le quotient par excès, on a

$$(2) \qquad N = B\alpha_e - I, \quad \text{ou} \quad N = (\alpha_e\,; -I).$$

L'ancienne Table devait renfermer 5760 Tableaux désignés chacun par son indicateur, les caractéristiques, dans chaque Tableau I, allant de B à $B^2 - 1$.

La *nouvelle Table* ([1]) comprend

1° le Tableau des indicateurs, avec les facteurs premiers des indicateurs composés;

2° le Tableau des produits

$$(3) \qquad II' = Bk + 1 \quad \text{ou} \quad II' = k\,; 1 \quad \text{ou} \quad II' \equiv 1 \pmod{B}$$

de deux indicateurs, la caractéristique k étant par défaut;

3° le Tableau 1, dont la première partie renferme les caractéristiques par défaut des nombres composés allant de 1 à $B - 1$, dont la seconde partie renferme des caractéristiques par défaut allant de B à $B^2 - 1$, chaque caractéristique étant suivie des facteurs premiers des nombres ayant cette caractéristique;

([1]) Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, t. 159, 5 octobre 1914; t. 160, 14 juin 1915; t. 162, 6 mars 1916; t. 163, 11 septembre 1916; t. 164, 19 mars 1917.

4° la première partie du Tableau -1 qui renferme les caractéristiques par excès des nombres composés allant de 2 à B.

2. Soit d'abord le nombre $(\alpha\,;\mathrm{I})$.

On cherche le plus grand diviseur commun Δ à I et à α.

Si $\Delta > 1$, on divise par Δ le nombre $(\alpha\,;\mathrm{I})$ et on obtient ainsi le nouveau nombre $\delta\,;\mathrm{I}_\delta$.

Quand $\mathrm{I}_\delta = 1$, le Tableau 1 fait connaître si le nombre $\delta\,;\mathrm{I}_\delta$ est composé et permet de trouver ses facteurs premiers.

Quand $\mathrm{I}_\delta \neq 1$, on est conduit à chercher la composition d'un nombre pour lequel δ et I_δ sont premiers entre eux ; on est donc amené à se servir d'un autre Tableau I_δ.

Ensuite on écrit

$$\mathrm{N} = (\alpha_e\ ;\ -\mathrm{I}_e), \quad \text{où } \alpha_e = \alpha + 1 \quad \text{et } \mathrm{I}_e = \mathrm{B} - \mathrm{I}$$

et l'on opère comme précédemment.

3. Méthode. — 1°. On amène dans le Tableau 1 un nombre $(\alpha\,;\mathrm{I})$, α et I étant premiers entre eux, en multipliant les deux membres de l'égalité (1) par un indicateur I' tel que l'égalité (3) soit satisfaite.

La caractéristique par défaut du nombre NI', *substitué à* N *est*

$$\chi = \mathrm{I}\alpha + k. \tag{4}$$

2°. On amène de même dans le Tableau -1 un nombre $(\alpha_e\ ;\ -\mathrm{I})$, α_e et I étant premiers entre eux.

La caractéristique par excès du nombre NI', *substitué à* N *est*

$$\chi_e = \mathrm{I}'\,\alpha_e - k. \tag{5}$$

3°. On amène dans le Tableau 1 le nombre $(\alpha_e\ ;\ -\mathrm{I})$ en multipliant par $(\mathrm{B} - \mathrm{I}')$ les deux membres de l'égalité (2).

La caractéristique par défaut du nombre $\mathrm{N}\,(\mathrm{B} - \mathrm{I}')$, *substitué à* N *est*

$$\chi = (\mathrm{B} - \mathrm{I}')\,\alpha_e + k - \mathrm{I}. \tag{6}$$

Evidemment, les caractéristiques χ et χ_e sont $< \mathrm{B}^2$.

4. Probléme. — *Ayant une caractéristique χ ou χ_e, reconnaitre à quelles conditions elle est la caractéristique d'un nombre qui soit le produit de deux nombres appartenant*

1° *tous deux au Tableau* 1,

2° *tous deux au Tableau* -1,

3° *l'un au Tableau* 1 *et l'autre au Tableau* -1,

les caractéristiques dans ces deux Tableaux etant inférieures à B.

Les solutions de ce problème sont très remarquables, car elles permettent d'obtenir seulement avec les premières parties du Tableau 1 et du Tableau — 1, la composition de beaucoup de nombres dont les caractéristiques ont été obtenues par la MÉTHODE (n° **3**).

Ces solutions pourront servir tant que l'on ne possédera que ces premières parties.

Les solutions du 1° et du 2° de ce problème se trouvant dans les « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences » (t. 162, 6 mars 1916; t. 164, 19 mars 1917), ce travail contient seulement la solution du 3°.

5. SOLUTION DU 3° (n° **4**). — Soient deux nombres $(\varepsilon\,;1)$ et $(\varepsilon_e\,;-1)$ appartenant respectivement au Tableau 1 et au Tableau — 1.

Le produit de ces deux nombres est dans le Tableau — 1 et il a pour caractéristique

$$\text{(7)} \qquad K\varepsilon\varepsilon_e = B\varepsilon\varepsilon_e - \varepsilon + \varepsilon_e\,.$$

Supposons que le produit $\varepsilon\varepsilon_e$ soit $< B$.

χ_e désignant une caractéristique $< B^2$ d'un nombre du Tableau — 1, soient q le quotient par défaut $< B$ et ε le reste obtenus en divisant K_e par B. On a

$$\text{(8)} \qquad \chi_e = Bq + r\,.$$

Deux cas se présentent pour le second membre de l'égalité (7), savoir:

$$-\varepsilon + \varepsilon_e > 0 \qquad \text{et} \qquad -\varepsilon + \varepsilon_e < 0\,.$$

6. PREMIER CAS DE LA SOLUTION DU 3° (n° **4**). — Dans le second membre de l'égalité (7), le terme $(-\varepsilon + \varepsilon_e)$ est positif.

Identifiant les égalités (7) et (8), on obtient les deux équations

$$\text{(9)} \qquad \varepsilon\varepsilon_e = q \quad , \quad \varepsilon_e - \varepsilon = r\,.$$

Les valeurs des inconnues ε et ε_e résultent d'une équation du second degré; comme elles doivent être entières et positives, il faut que le discriminant soit un carré entier positif.

Sans résoudre l'équation du second degré, on trouve ainsi les valeurs de ε_e et de ε. Il est facile de décomposer, de toutes les manières possibles, q en groupes de deux facteurs entiers positifs. Si la différence de deux facteurs d'un groupe est égal à r, ces deux facteurs sont les valeurs de ε_e et de ε. Le facteur ε se prend dans le Tableau 1 et le facteur ε_e se prend dans le Tableau — 1.

7. *Exemple.* — Soit

$$\begin{aligned} N &= 624\ 677\ 381 \\ &= 20801\ ;\ 23351 \\ &= 20802\ ;\ -6679 \end{aligned}$$

N est amené à NI′ dans le Tableau — 1. On trouve

$$I' = 589 = 19.31\,, \qquad k = 131\,.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\chi_e &= 589\,.\,20802 - 131\\ &= 12\ 252\ 247\,.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{array}{cc} q = 408\,, & r = 7\\ 408 = 17\,.\,24\,, & 24 - 17 = 7\\ \varepsilon_e = 24\,, & \varepsilon = 17\end{array}$$

$$24\,;\, -1 = 31\,.\,67\,.\,347\,, \qquad 17\,;\,1 = 19\,.\,97\,.\,277\,.$$

Comme I′ = 19 . 31, on trouve que

$$N = 67\,.\,97\,.\,277\,.\,347\,.$$

8. A la valeur

$$\chi_e = 12\ 252\ 247$$

conduisent aussi les nombres suivants, dont les indicateurs sont négatifs et, en valeur absolue, $< \frac{1}{2}B$ pour les trois premiers et $> \frac{1}{2}B$ pour les trois derniers :

42 847 907	($I' = 1427$, $k = 1402$) ;
122 359 487	($I' = 3007$, $k = 1278$) ;
289 029 833	($I' = 1273$, $k = 378$) ;
19 825 151	($I' = 18559$, $k = 15252$) ;
55 806 913	($I' = 6593$, $k = 4140$) ;
56 614 091	($I' = 6499$, $k = 4867$).

9. Second cas de la solution du 3° (n° **4**). — Dans le second membre de l'égalité (7), le terme $(-\varepsilon + \varepsilon_e)$ est négatif. On écrit ainsi l'égalité (8)

$$(10) \qquad \chi_e = B\,(q + 1) - (B - r)\,.$$

Identifiant les égalités (7) et (10) on obtient les deux équations

$$(11) \qquad \varepsilon\varepsilon_e = q + 1\,, \qquad \varepsilon - \varepsilon_e = B - r\,.$$

Sans résoudre l'équation du second degré d'où résulteraient les valeurs de ε et ε_e, on arrive facilement, comme dans le premier cas, à les trouver en décomposant $q + 1$ en deux facteurs ε et ε_e dont la différence $\varepsilon - \varepsilon_e$ égale $B - r$. Le facteur ε se prend dans le Tableau 1 et le facteur ε_e se prend dans le Tableau — 1.

10. *Exemple.* — Soit

$$N = 243\ 173\ 083$$
$$= 8097\ ;\ 20173$$
$$= 8098\ ;\ -9857\ .$$

N est amené en NI' dans le Tableau — 1. On trouve

$$I' = 27413 = 79\ .\ 347\ , \qquad k = 8998\ .$$

Par suite

$$\chi_e = 27413\ .\ 8098 - 8998$$
$$= 221\ 981\ 476\ .$$

On obtient

$$q + 1 = 7392\ , \qquad B - r = 284$$
$$7392 = 24\ .\ 308\ , \qquad 284 = 308 - 24$$
$$\varepsilon = 308\ , \qquad \varepsilon_6 = 24$$
$$308\ ;\ 1 = 17\ .\ 71\ .\ 79\ .\ 97\ , \qquad 24\ ;\ -1 = 31\ .\ 67\ .\ 347\ .$$

Comme $I' = 79\ .\ 347$, on trouve que

$$N = 17\ .\ 31\ .\ 67\ .\ 71\ .\ 97\ .$$

11. J'indiquerai ultérieurement comment la solution précédente du problème du n° 4 peut être étendue au cas où le produit de deux caractéristiques des Tableaux 1 et — 1 varie de B à B^2.

Matematica. — *Un' applicazione del metodo di sommazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali.* Nota di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.