ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Un'applicazione del metodo di sommazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali.* Nota di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Le formole risolutive dell'equazione integrale di seconda specie

$$u(s) = h(s) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\, h(t)\, dt\,, \tag{[1]}$$

date dal Fredholm [1], dallo Schmidt [2], come pure quelle date da me in una recente Memoria [3] presentano, nella loro applicazione, delle difficoltà spesso non lievi, derivanti dalla determinazione delle funzioni e delle costanti che in esse figurano [4].

Difficoltà analoghe, se non anche maggiori, s'incontrano nella risoluzione dell'equazione integrale di prima specie

$$g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\, h(t)\, dt\,, \tag{[2]}$$

per la quale poi, a differenza di quella di seconda, non si conosce alcuna formula risolutiva, che rappresenti incondizionatamente una soluzione della [2], nei casi in cui questa ne ammetta.

Però tanto l'equazione [1] quanto la [2] ammettono una soluzione *formale* molto semplice, che per la [1] è data da

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n u_n(t)\,, \tag{[3]}$$

(1) *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* Acta Math., t. XXVII, 1903.

(2) *Entwicklung willkürlicher Funktionen* etc. Inaugural-Dissert., Gottingen, 1905.

(3) *Sulle equazioni integrali del tipo Fredholm.* Rend. Circolo Matem. Palermo, XLI, 1916.

(4) Invero la formola del Fredholm è di laboriosissima applicazione; quella dello Schmidt esige la conoscenza degli autovalori e delle autofunzioni del nucleo simmetrico; infine quella data da me, nella citata Memoria, richiede la conoscenza delle funzioni caratteristiche, la cui determinazione è tutt'altro che facile, anche nei casi in cui il nucleo abbia forma semplicissima, come la seguente: $\mathrm{K}(s,t) = s + t$.

dove

$$u_n(t) = \int_a^b \mathrm{K}_n(t, r)\, u(r)\, dr \quad ; \quad u_0(t) = u(t) :$$

e per la [2], nel caso che il nucleo sia simmetrico, da (1)

$$[4] \qquad h(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathrm{G}_1^{(\nu)}(t)}{\Gamma_\nu}.$$

Disgraziatamente però, tanto per la [3] che per la [4], ben di rado sono soddisfatte le condizioni di convergenza e di integrabilità, termine a termine, senza le quali le suddette espressioni non possono rappresentare una soluzione *effettiva*; si è così quasi sempre costretti a rinunciare ai vantaggi derivanti dalla loro semplicità.

Mi sono perciò proposto di vedere se sia possibile di utilizzare le [3] e [4] per la risoluzione delle [1] e [2] rispettivamente, nel caso in cui esse non siano convergenti; ed ho trovato che, se esse sono *sommabili*, nel senso dato a tale vocabolo dal Borel (2), esse rappresentano una soluzione dell'equazione proposta. Oggetto della presente Nota è appunto quello di esporre questo risultato, il quale parmi presentare qualche interesse.

2. Diremo che una serie di funzioni $v_n(s)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, continue in un intervallo finito (ab), è *sommabile* in esso se

1°) la serie

$$\mathrm{S}(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(s) \frac{x^n}{n!} \qquad (\sigma_n(s) = v_0(s) + v_1(s) + \cdots + v_n(s))$$

è convergente per ogni $x \geqq 0$ finito e per ogni valore di s in (ab);

2°) l'espressione $e^{-x}\mathrm{S}(s, x)$ tende, per $x \longrightarrow \infty$, ad un limite $\mathrm{S}(s)$, determinato e finito.

Il limite $\mathrm{S}(s)$, quando esiste, sarà la *somma* della serie data $\sum_{n=}^{\infty} v_n(s)$.

Ricorderemo il seguente teorema di Hardy (3) di cui faremo uso:

Se $f(x)$ è una funzione continua assieme alla sua derivata prima $f'(x)$ per $x \geqq 0$, e se l'integrale improprio

$$[\alpha] \qquad \int_0^\infty e^{-x} f'(x)\, dx$$

(1) Vergerio, loc. cit., cap. III, § 1, pag. 22.
(2) *Leçons sur les séries divergentes*, cap. III. Paris. Gauthier-Villars, 1901.
(3) Quaterly Journal of Mathematics, vol. 35, 1903.

è convergente, è pure convergente l'integrale

$$(\beta) \qquad \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx\,;$$

si ha inoltre

$$(\gamma) \qquad \lim_{x=\infty} e^{-x} f(x) = 0\,.$$

Il teorema è evidentemente valido anche nel caso in cui la $f(x)$ sia funzione, oltre che di x, anche di un parametro s variabile in un intervallo finito (ab); potremo perciò dire che, se, per ogni valore di s in (ab), l'integrale $[\alpha]$ converge, convergerà del pari l'integrale $[\beta]$ e sarà inoltre valida la $[\gamma]$.

3. Supposto che le funzioni $K(st)$ ed $u(s)$ siano entrambe limitate e continue, la prima entro il campo $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ e la seconda entro l'intervallo finito (ab), si dimostra con facilità che la serie $S(s\,,x)$ del numero precedente, relativa alla serie [3], è sempre convergente, per ogni $x \geqq 0$ finito, in modo assoluto ed indipendentemente da s. Si ha invero, se M è un numero finito e positivo,

$$|K(s\,,t)| < M\,,$$

$$|K_2(s,t)| \leqq \int_a^b |K(s,r)|\,|K(r,t)|\,dr < M^2 (b-a)\,,$$

$$|K_3(s,t)| \leqq \int_a^b |K(s,r)|\,|K_2(r,t)|\,dr < M^3 (b-a)^2\,,$$

ed, in generale,

$$|K_n(s,t)| < M^n (b-a)^{n-1}\,.$$

Se quindi è $|u(s)| < m$, avremo

$$|u_n(s)| \leqq \int_a^b |K_n(st)|\,|u(t)\,dt < M^n (b-a)^n\, m\,;$$

ed anche posto $|\lambda|\, M\,(b-a) = \varrho$,

$$|\sigma_n(s)| \leqq \sum_{r=0}^{n} |\lambda|^r\,|u_r(s)| < m \sum_{r=0}^{n} \varrho^r = m\,\frac{1-\varrho^{n+1}}{1-\varrho}\,;$$

ed ancora, se p è un numero intero e positivo qualunque,

$$\left|\sum_{r=n}^{n+p} \sigma_r(s)\,\frac{x^r}{r!}\right| \leqq \sum_{r=n}^{n+p} \left|\sigma_r(s)\right| \frac{x^r}{r!} < \frac{m}{1-\varrho} \sum_{r=n}^{n+p} (1-\varrho^{r+1})\,\frac{x^r}{r!} =$$

$$= \frac{m}{1-\varrho} \sum_{r=n}^{n+p} \frac{x^r}{r!} - \frac{m\varrho}{1-\varrho} \sum_{r=n}^{n+p} \frac{(\varrho x)^r}{r!}\,;$$

da cui risulta che per la serie [3] è sempre soddisfatta la prima delle due condizioni poste per la sua sommabilità in (ab), ed inoltre che la serie $S(s, x)$ è convergente uniformemente rispetto ad s, per ogni $x \geqq 0$ finito, e perciò integrabile termine a termine, rispetto a questa variabile, nell'intervallo (ab).

Gioverà poi qui notare che la serie

$$v(sx) = u_0(s) - \lambda u_1(s)\, x + \lambda^2 u_2(s) \frac{x^2}{2!} - \lambda^3 u_3(s) \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

che il Borel chiamò *associata*, converge anch'essa in modo assoluto ed uniforme rispetto ad s, per ogni valore finito di $x \geqq 0$, come si vede subito dalla relazione

$$|v(s, x)| \leqq \sum_{r=0}^{\infty} |\lambda|^r\, |u_r(s)| \frac{x^r}{r!} < m \sum_{r=6}^{\infty} \frac{(\varrho x)^r}{r!} = m e^{\varrho x}.$$

È poi evidente che si potrà applicare ad essa la derivazione termine a termine rispetto ad x: sarà cioè

[5] $$v'(s, x) = -\lambda u_1(s) + \lambda^2 u_2(s) x - \lambda^3 u_3(s) \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

4. Supposto che la funzione $e^{-x} S(s, x)$ convenga al suo limite $S(s)$ *indipendentemente da* s, sostituiamo nel secondo membro della [1] l'espressione $e^{-x} S(s, x)$ alla funzione incognita $h(s)$; osservando che

$$\lambda \int_a^b K(s, t)\, \sigma_n(t)\, dt = -\sigma_{n+1}(s) + \sigma_0(s),$$

avremo:

$$e^{-x} S(s, x) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, e^{-x} S(t, x)\, dt =$$

$$= e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} \sigma_r(s) \frac{x^r}{r!} - e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} (\sigma_{r+1}(s) - \sigma_0(s)) \frac{x^r}{r!} =$$

$$= \sigma_0(s) - e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} [\sigma_{r+1}(s) - \sigma_r(s)] \frac{x^r}{r!} =$$

$$= u_0(s) - e^{-x} \left[-\lambda u_1(s) + \lambda^2 u_2(s)\, x - \lambda^3 u_3(s) \frac{x^2}{2!} + \cdots \right];$$

e quindi, per la [5],

[6] $$e^{-x} S(s, x) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, e^{-x} S(t, x)\, dt = u_0(s) - e^{-x} v'(s, x).$$

Poichè la [3], per le ipotesi fatte, è sommabile in (ab), esisterà finito e determinato il limite per $x \longrightarrow \infty$ del primo membro, potendosi invertire i segni di limite e di integrale, in grazia della supposta convergenza uniforme della funzione $e^{-x}\mathrm{S}(s,x)$ verso il suo limite; esisterà quindi, pure determinato e finito, il $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}v'(s,x)$.

5. Indicando ora con $\mathrm{S}'(s,x)$ la derivata della funzione $\mathrm{S}(s,x)$ rispetto ad x, si può scrivere

$$e^{-x}[\mathrm{S}'(s,x)-\mathrm{S}(s,x)]=e^{-x}v'(s,),$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{-x}\mathrm{S}(s,x)=e^{-x}v'(s,x);$$

ed essendo

$$[e^{-x}\mathrm{S}(s,x)]_{x=0}^{\infty}=\mathrm{S}(s)=u_0(s),$$

avremo anche

[7] $$\mathrm{S}(s)-u_0(s)=\int_0^\infty e^{-x}v'(s,x)\,dx;$$

da cui integrando per parti

$$\mathrm{S}(s)-u_0(s)=-[e^{-x}v'(s,x)]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}v''(s,x)\,dx,$$

dove $v''(s,x)$ indica la derivata della $v'(s,x)$ rispetto ad x.

Esistendo, per quanto osservammo più sopra, finito e determinato il $\lim\limits_{x=\infty}[e^{-x}v'(s,x)]$, l'integrale improprio del secondo membro sarà convergente; pel citato teorema di Hardy sarà allora

$$\lim_{x=\infty}[e^{-x}v'(s,x)]=0;$$

e la funzione $\lim\limits_{x=\infty}e^{-x}\mathrm{S}(s,x)$ sarà per la [6] una soluzione della [1].

6. Integrando per parti l'integrale del secondo membro della [7], si ottiene:

$$\int_0^\infty e^{-x}v'(s,x)\,dx=[e^{-x}v(s,x)]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}v(s,x)\,dx;$$

e poichè l'integrale del primo membro è finito, convergerà, pel teorema di Hardy, anche quello del secondo; sarà inoltre

$$\lim_{x=\infty}e^{-x}v(s,x)=0.$$

Si ha così dalla [7]:

[8] $$\mathrm{S}(s)=\int_0^\infty e^{-x}v(s,x)\,dx.$$

Possiamo quindi affermare che *se la funzione* $e^{-x}S(s,x)$, *relativa alla serie* [3], *tende per* $x \longrightarrow \infty$ *ad un limite determinato e finito indipendentemente da* s, *questo limite sarà una soluzione dell'equazione* [1].

7. Come esempio, consideriamo l'equazione

$$\cos s = h(s) + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}(s + \cos t)\, h(t)\, dt\,.$$

Essendo

$$u_0(s) = \cos s \ ; \ u_1(s) = \pi \ ; \ u_n(s) = (2\pi^2)^{n-1}\, s \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \lambda^n u_n(s) = \cos s - \frac{1}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2} - \frac{s}{2\pi^2} + \frac{s}{2\pi^2} - \frac{s}{2\pi^2} + \cdots$$

è indeterminata. Essa però soddisfa alla condizione enunciata al numero precedente; e poichè si ha

$$v(s,x) = \cos s - \frac{x}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2}\left(\frac{x^2}{2\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \cdots\right) =$$

$$= \cos s - \frac{x}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2}(e^{-x} + x - 1),$$

la [8] ci darà ia soluzione

$$h(s) = S(s) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x}\left[\cos s - \frac{x}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2}(e^{-x} + x - 1)\right] dx = \cos s - \frac{1}{2\pi} + \frac{s}{4\pi^2},$$

la quale, come facilmente si verifica, soddisfa la [1].

8. Per dimostrare che la sommabilità della serie [4] è condizione sufficiente affinchè questa possa rappresentare una soluzione della [2], basterà provare che *ogni serie di funzioni convergente in modo assoluto ed uniforme in un intervallo finito* (ab) *è sempre sommabile in esso; e la sua nuova somma coincide con l'antica.*

Abbiasi infatti la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(s)$ di funzioni definite in (ab) convergente in modo assoluto ed uniforme; e sia $V(s)$ la sua somma secondo l'antica definizione.

Consideriamo la funzione corrispondente $S(s,x)$:

$$S(s,x) = \alpha_0(s) + [\alpha_0(s) + \alpha_1(s)]\, x + [\alpha_0(s) + \alpha_1(s) + \alpha_2(s)]\frac{x^2}{2\,!} + \cdots\cdots =$$

$$= \alpha_0(s)\, e^x + \alpha_1(s)\left[x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots\right] +$$

$$+ \alpha_2(s)\left[\frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots\right] + \cdots\cdots =$$

$$= \alpha_0(s)\, e^x + \alpha_1(s)\,(e^x - 1) + \alpha_2(s)\,(e^x - 1 - x) +$$

$$+ \alpha_3(s)\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2\,!}\right) + \cdots\cdots$$

Essendo, per $x \geqq 0$, i coefficienti delle $\alpha_n(s)$ tutti positivi e minori di e^x, avremo

$$|S(s,x)| < e^x \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n(s)|,$$

la funzione $S(s,x)$ sarà quindi convergente per ogni $x \geqq 0$ e finito; e poichè

$$\lim_{x=\infty} |e^{-x} S(s,x)| < \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n(s)|,$$

la serie data è sommabile (n $(a\,b)$.

Ora essendo

$$\begin{aligned} V(s) - e^{-x} S(s,x) &= e^{-x}\Big[\alpha_1(s) + \alpha_2(s)(1+x) + \\ &\quad + \alpha_3(s)\left(1 + x + \frac{x^2}{2\,!}\right) + \alpha_4(s)\left(1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!}\right) + \cdots\Big] = \\ &= e^{-x}\Big[\Big\{V(s) - \alpha_0(s)\Big\} + \Big\{V(s) - \alpha_0(s) - \alpha_1(s)\Big\} x + \\ &\quad + \Big\{V(s) - \alpha_0(s) - \alpha_1(s) - \alpha_2(s)\Big\} \frac{x^2}{2\,!} + \cdots\Big], \end{aligned}$$

posto

$$V(s) - \alpha_0(s) - \alpha_1(s) - \cdots - \alpha_n(s) = R_n(s),$$

sarà anche

$$V(s) - e^{-x} S(s,x) = e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} R_r(s) \frac{x^r}{r\,!};$$

la quale può anche scriversi, se m è un numero finito qualunque,

$$V(s) - e^{-x} S(s,x) = e^{-x} \sum_{r=0}^{r=m} R_r(s) \frac{x^r}{r\,!} + e^{-x} \sum_{r=m+1}^{\infty} R_r(s) \frac{x^r}{r\,!}.$$

Per la convergenza uniforme della serie data, potrà determinarsi un numero m positivo e finito tale che, per ogni $r \geqq m$, sia $|R_r(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$; essendo $\frac{\varepsilon}{2}$ una quantità positiva arbitrariamente piccola; sarà, con ciò, per ogni $x \geqq 0$ e finito,

$$\left| e^{-x} \sum_{r=m+1}^{\infty} R_r(s) \frac{x^r}{r!} \right| < e^{-x} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{x^r}{r\,!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte, essendo, per ogni r finito, $\lim_{x=\infty} e^{-x} x^r = 0$, si potrà trovare un valore finito x_1 di x tale che per $x > x_1$, si abbia, qualunque sia s,

$$\left| e^{-x} \sum_{r=0}^{r=m} R_r(s) \frac{x^r}{r\,!} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sarà quindi per $x > x_1$:

$$|\mathrm{V}(s) - e^{-x}\,\mathrm{S}(s,x)| < \varepsilon\,;$$

cioè la nuova somma coincide coll'antica.

9. Ritornando alla questione propostaci, supposto che [4] sia sommabile in (ab), che la [2] ammetta soluzione e che esista un numero finito e positivo ϱ tale da aversi, per ogni valore di ν,

$$\left|\frac{\mathrm{G}_1^{(\nu)}(s)}{\Gamma_\nu}\right| < \varrho^\nu$$

la serie $\mathrm{S}(s,x)$, relativa alla [4] sarà, per quanto vedemmo al n. 3, uniformemente convergente rispetto ad s; sarà inoltre

$$\lim_{v=\infty} e^{-x}\,\mathrm{S}(s,x) = \mathrm{S}(s)\,.$$

Supposto ancora che la convergenza al limite per $x = \infty$ sia uniforme, avremo:

$$\int_a^b \mathrm{K}(s,t)\left\{\lim_{x=\infty} e^{-x}\,\mathrm{S}(t,x)\right\}dt = \lim_{x=\infty}\int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,e^{-x}\,\mathrm{S}(t,x)\,dx =$$

$$= \lim_{x=\infty}\Big[\mathrm{G}^{(1)}(s) + \{\mathrm{G}^{(1)}(s) + \mathrm{G}^{(2)}(s)\}\,x +$$

$$+ \{\mathrm{G}^{(1)}(s) + \mathrm{G}^{(2)}(s) + \mathrm{G}^{(3)}(s)\}\,\frac{x^2}{2\,!} + \cdots\Big]e^{-x}.$$

Ma ammettendo la [2] soluzione, dev'essere [1]

$$g(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{G}^{(\nu)}(s)\,,$$

dove la serie del secondo membro è sommabile in (ab), in grazia della sua convergenza assoluta ed uniforme; dovrà perciò aversi:

$$g(s) = \lim_{x=\infty} e^{-x}\Big[\mathrm{G}^{(1)}(s) + \{\mathrm{G}^{(1)}(s) + \mathrm{G}^{(2)}(s)\}\,x +$$

$$+ \{\mathrm{G}^{(1)}(s) + \mathrm{G}^{(2)}(s) + \mathrm{G}^{(3)}(s)\}\,\frac{x^2}{2\,!} + \cdots\Big];$$

il che prova che la [4] è una soluzione della [2].

[1] Vergerio, loc. cit., pag. 19.