ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 maggio 1917.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Rappresentazioni normali uniformi e sistemi di Weingarten.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. In una mia Nota inserita nel vol. XXV di questi Rendiconti (seduta del 6 febbraio 1916), ho posto il concetto di *rappresentazioni normali uniformi* di due spazii qualunque S_n, S'_n, di egual numero n di dimensioni. l'uno sull'altro; e nel caso che i due spazii abbiano curvature costanti K, K' (differenti od eguali) ho dimostrato che esistono infinite rappresentazioni della specie, dipendenti da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie. Ogni tale rappresentazione dà luogo a due sistemi n^{pli} ortogonali, l'uno nello spazio S_n, l'altro nelle spazio S'_n, che diciamo i sistemi principali della rappresentazione, le loro linee coordinate seguendo in ogni punto una delle n direzioni principali.

La ricerca di questi notevoli sistemi n^{pli} ortogonali, nell'ipotesi che *i moduli principali di dilatazione* $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ *siano costanti diseguali*, viene a dipendere dal sistema di equazioni a derivate parziali stabilito al n. 5 della Nota [sistema (B)], che lega i coefficienti H_i del ds^2

$$ds^2 = H_1^2\,du_1^2 + H_2^2\,du_2^2 + \cdots + H_n^2\,du_n^2$$

e le corrispondenti rotazioni β_{ik}. Se si pone

$$c_1 = \frac{1}{\mu_1^2}\,,\quad c_2 = \frac{1}{\mu_2^2}\,,\ \dots,\ c_n = \frac{1}{\mu_n^2}\,,$$

questo sistema differenziale fra le H_i e le β_{ik} si scrive:

$$
(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \;, \quad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \dfrac{c_k - c_\lambda}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + \dfrac{K c_k - K'}{c_i - c_k} H_i H_k \end{cases}
$$
(1).

Le (I) formano un sistema di Bourlet-Darboux *completamente integrabile*, e la sua soluzione generale comprende quindi $n(n-1)$ funzioni arbitrarie.

L'integrazione effettiva del sistema (I) è un problema manifestamente molto complicato in generale; però dimostreremo che anche qui, come in tante altre questioni di analisi applicata alla geometria, si possono stabilire dei metodi ricorrenti che, partendo da una soluzione nota, permettono di trovarne infinite nuove coll'integrazione di equazioni differenziali ordinarie. E spingendo più in là la ricerca si potrebbe dimostrare un *teorema di permutabilità* che permette di risparmiare ogni integrazione.

2. L'accennato metodo *d'integrazione successiva* del sistema (I) dipende geometricamente dalle *trasformazioni di Ribaucour* per inviluppi di ipersfere dei sistemi n^{pli} ortogonali. Per le formole relative a queste trasformazioni mi riporto all'altra Nota nello stesso volume dei Rendiconti (19 marzo 1916), le formole ivi stabilite per lo spazio S_n euclideo valendo ancora nel caso generale con leggiere modificazioni, dovute alla curvatura dello spazio.

Abbiasi nello spazio S_n, di curvatura costante K, un sistema n^{plo} ortogonale (Σ), definito dalla corrispondente forma del ds^2

$$
(2) \qquad ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + \cdots + H_n^2\, du_n^2 \,.
$$

I coefficienti H_i e le relative rotazioni β_{ik} sono legati dalle equazioni caratteristiche:

$$
(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \;, \quad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + K H_i H_k = 0 \,. \end{cases}
$$

Ora le trasformazioni di Ribaucour per inviluppi di ipersfere dei sistemi n^{pli} ortogonali (Σ) in altri sistemi (Σ') derivati corrispondono biunivocamente ai sistemi di $n+1$ funzioni

$$
\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi,
$$

(1) Per il significato delle segnature veggasi la Nota citata.

che diremo le *funzioni trasformatrici*, assoggettate a soddisfare al sistema differenziale

$$(4)\qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i \gamma_i \, ;$$

sistema che ammette soluzioni dipendenti da n funzioni arbitrarie. Scelta una soluzione $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi)$ delle (4), dal sistema (Σ) supposto noto si avrà *in termini finiti* il sistema (Σ') derivato con formole che non occorre qui trascrivere. Solo importa osservare che la relazione fra $(\Sigma), (\Sigma')$ è involutoria, onde avremo n funzioni trasformatrici $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n, \overline{\varphi}$ pel passaggio inverso da (Σ') a (Σ), e *queste sono date dalle semplici formole* (ibi, n. 4):

$$(5)\qquad \overline{\gamma}_1 = \varrho\gamma_1 \quad , \quad \overline{\gamma}_2 = \varrho\gamma_2 \, , \ldots , \, \overline{\gamma}_n = \varrho\gamma_n \quad , \quad \overline{\varphi} = -\varrho\varphi \, ,$$

con ϱ fattore di proporzionalità (funzione delle u_i).

3. Ciò premesso, dimostriamo che si arriva allo stesso sistema fondamentale (I) proponendosi la questione seguente:

Quali sono i sistemi n^{pli} ortogonali (Σ) dello spazio S_n, a curvatura costante K, che ammettono trasformazioni di Ribaucour colle funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi$ legate da un' identità quadratica

$$(6)\qquad c_1\gamma_1^2 + c_2\gamma_2^2 + \cdots + c_n\gamma_n^2 + \mathrm{K}'\varphi^2 = \text{cost.} \, ,$$

dove $c_1, c_2, \ldots, c_n, \mathrm{K}'$ sono costanti, le prime n inoltre differenti da zero e fra loro?

Avvertiamo che qui ed in seguito escluderemo sempre i casi, di più ovvia trattazione, nei quali si annulli qualche rotazione β_{ik}. Ora dalla (6), derivata rapporto ad una qualunque u_i, abbiamo

$$\gamma_i \left\{ c_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda + \mathrm{K}' \mathrm{H}_i \varphi \right\} = 0 \, ,$$

ed essendo $\gamma_i \neq 0$, ne dedurremo le

$$(4')\qquad c_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda + \mathrm{K}' \mathrm{H}_i \varphi = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \, .$$

Aggregando queste n equazioni alle (4), dobbiamo esaminare le relative condizioni d' integrabilità

$$c_i \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ik}\gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{\lambda}^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda + \mathrm{K}' \frac{\partial}{\partial u_k}(\mathrm{H}_i \varphi) = 0 \, ,$$

che possiamo scrivere

$$c_i \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ik}\gamma_k) + c_k \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ki}\gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k}\sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda + \mathrm{K}' \frac{\partial}{\partial u_k}(\mathrm{H}_i \varphi) = 0 .$$

Eseguendo le derivazioni colle (4), (3) e raccogliendo i termini che contengono γ_k, otteniamo:

$$\gamma_k \left\{ c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + \mathrm{K}'\mathrm{H}_i \mathrm{H}_k \right\} + \Omega = 0 , \tag{7}$$

avendo posto

$$\Omega = c_i \beta_{ik}\beta_{ki}\gamma_i + \beta_{ki} c_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \beta_{ki} \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda k}\gamma_\lambda + \mathrm{K}'\beta_{ki}\mathrm{H}_k \varphi ,$$

ed anche

$$\Omega = \beta_{ki} \left\{ c_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda k}\gamma_\lambda + \mathrm{K}'\mathrm{H}_k \varphi \right\} .$$

Ora per la (4') è $\Omega = 0$, indi la (7) resta

$$c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + \mathrm{K}'\mathrm{H}_i \mathrm{H}_k = 0 ,$$

e questa, combinata colla (3) della seconda linea, ci dà

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_k - c_\lambda}{c_i - c_k}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + \frac{\mathrm{K}c_k - \mathrm{K}'}{c_i - c_k}\mathrm{H}_i \mathrm{H}_k ,$$

che è precisamente l'equazione della seconda linea nel sistema (I). Adunque se le funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi$ sono legate dall'identità quadratica (6), il sistema n^{plo} ortogonale (Σ) appartiene necessariamente alla classe caratterizzata dal sistema differenziale (I).

4. Viceversa, se il sistema (Σ) appartiene a questa classe, aggregando le (4') alle (4), si ha il sistema di equazioni lineari ai differenziali totali per le funzioni incognite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi$:

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k \quad , \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \frac{c_\lambda}{c_i}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda - \frac{\mathrm{K}'\mathrm{H}_i \varphi}{c_i} \\ &\qquad\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i \gamma_i . \end{aligned} \right.$$

Ora il calcolo stesso sopra eseguito dimostra che, a causa delle (I), questo è un sistema completamente integrabile, ed ammette l'integrale quadratico (6). La sua soluzione generale contiene quindi $n+1$ costanti arbitrarie per le quali possiamo assumere i valori iniziali $\gamma_i^{(0)}, \varphi^{(0)}$ delle funzioni trasformatrici per un sistema iniziale $u_i^{(0)}$ di valori delle variabili indipendenti.

Ora di più scegliamo i valori iniziali $\gamma_i^{(0)}, \varphi^{(0)}$ per modo che *si annulli nella* (6) *la costante del secondo membro*, indi si abbia [1]

$$(\mathrm{II}^*) \qquad c_1\gamma_1^2 + c_2\gamma_2^2 + \cdots + c_n\gamma_n^2 + \mathrm{K}'\varphi^2 = 0\,.$$

Applicando allora al sistema (Σ) la corrispondente trasformazione $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi)$ di Ribaucour, è facile vedere che il sistema derivato (Σ') apparterrà alla medesima classe. Ed infatti le funzioni trasformatrici $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n; \overline{\varphi}$ nel passaggio inverso da (Σ') a (Σ) soddisferanno ancora, per le (5), alla relazione quadratica (II*) che caratterizza, come si è visto, i sistemi n^{pli} ortogonali (Σ) corrispondenti alle formole (I). Concludiamo quindi:

Nota una rappresentazione normale uniforme di uno spazio S_n *a curvatura costante* K *sopra un altro spazio* S'_n *di curvatura costante* (*negativa*) K′, *se ne ottengono infinite nuove integrando il sistema lineare ai differenziali totali* (II), *colla condizione* (II*) *ai limiti.*

5. Nei risultati ottenuti è essenziale l'ipotesi che i moduli di dilatazione siano tutti diversi e resta a vedersi quali modificazioni vi si introducono per l'eguaglianza di due o più dei moduli.

Limitiamo qui la ricerca al caso $n = 3$ degli spazii a tre dimensioni, sempre escludendo i casi di più facile trattazione in cui si annulli qualche β_{ik}, chè allora nel sistema triplo una famiglia è composta di superficie parallele e le altre due di sviluppabili. Siano

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 &= \mathrm{H}_1^2\,du_1^2 + \mathrm{H}_2^2\,du_2^2 + \mathrm{H}_3^2\,du_3^2 \\ ds'^2 &= a^2\mathrm{H}_1^2\,du_1^2 + a^2\mathrm{H}_2^2\,du_2^2 + c^2\mathrm{H}_3^2\,du_3^2 \end{aligned}\right.$$

i due elementi lineari di S_3, S'_3, le costanti a^2, c^2 essendo supposte naturalmente diseguali.

Indicando con accenti le quantità relative al secondo spazio, si ha

$$\mathrm{H}'_1 = a\mathrm{H}_1\,,\ \mathrm{H}'_2 = a\mathrm{H}_2\,,\ \mathrm{H}'_3 = c\mathrm{H}_3\,,$$

e conseguentemente

$$\beta'_{12} = \beta_{12}\,,\ \beta'_{21} = \beta_{21}\,;\ \beta'_{13} = \frac{c}{a}\beta_{13}\,,\ \beta'_{23} = \frac{c}{a}\beta_{23}\,;\ \beta'_{31} = \frac{a}{c}\beta_{31}\,,\ \beta'_{32} = \frac{a}{c}\beta_{32}\,.$$

[1] Si avvertirà che se il sistema (Σ) corrisponde ad una rappresentazione normale uniforme di S_n sopra S'_n, le costanti c_i sono per le (1) tutte positive, e per ciò deve essere $\mathrm{K}' < 0$, ossia lo spazio S'_n deve essere pseudosferico.

Se scriviamo l'equazione della terza linea in (3) per lo spazio S_3

$$\frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1}+\frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_2}+\beta_{31}\,\beta_{32}+\mathrm{K}\,\mathrm{H}_1\,\mathrm{H}_2=0\,,$$

insieme all'analoga per S'_3

$$\frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1}+\frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_2}+\frac{a^2}{c^2}\,\beta_{31}\,\beta_{33}+\mathrm{K}'\,a^2\,\mathrm{H}_1\,\mathrm{H}_2=0\,,$$

sottraendo abbiamo

$$\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)\beta_{31}\,\beta_{32}=(\mathrm{K}-\mathrm{K}'\,a^2)\,\mathrm{H}_1\,\mathrm{H}_2\,,$$

indi

$$\frac{\beta_{31}\,\beta_{32}}{\mathrm{H}_1\,\mathrm{H}_2}=\frac{c^2\,(\mathrm{K}-\mathrm{K}'\,a^2)}{a^2-c^2}\,.$$

Ora il primo membro rappresenta appunto la curvatura totale *relativa* k_0 delle superficie $u_3=$ cost., cioè il prodotto delle due curvature principali

$$\frac{1}{r_{31}}=\frac{\beta_{31}}{\mathrm{H}_1}\,,\quad \frac{1}{r_{32}}=\frac{\beta_{32}}{\mathrm{H}_3}\,,$$

e la formola ottenuta si scrive

$$k_0=\frac{c^2\,(\mathrm{K}-\mathrm{K}'\,a^2)}{a^2-c^2}\,. \tag{8}$$

La famiglia $u_3=$ cost. nel sistema triplo ortogonale è formata dunque di superficie colla medesima curvatura costante, cioè:

In qualunque rappresentazione normale uniforme di due spazii a tre dimensioni ed a curvatura costante, l'uno sull'altro, quando due dei moduli di dilatazione sono eguali, il sistema triplo ortogonale principale é un sistema di Weingarten.

Si vede così come si presentano spontaneamente i sistemi di Weingarten in questi problemi geometrici di rappresentazione. Dalle mie antiche ricerhe su questi sistemi [1] è facile d'altronde dedurre inversamente che: *Ogni sistema di Weingarten in uno spazio a curvatura costante è il sistema principale in una rappresentazione normale uniforme di questo spazio sopra un altro spazio di curvatura costante.*

6. Siamo ricondotti ancora ai sistemi di Weingarten trattando la questione seguente, corrispondente a quella del n. 3, ove si suppongono eguali due delle costanti c_i:

[1] Annali di matematica, tomo XIII della serie 2ª (1885) e Memorie dei Lincei, vol. IV, serie 4ª (1887).

Quali sono i sistemi tripli ortogonali dello spazio S_3, *di curvatura costante* K, *che ammettono trasformazioni di Ribaucour, colle funzioni trasformatrici* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varphi$ *legate da un'identità quadratica della forma*

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + a\gamma_3^2 + b\varphi^2 = 0\,, \tag{9}$$

con a, b *costanti?*

Questa, derivata rapporto ad u_1, u_2, u_3, osservando le (4), dà

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\gamma_1}{\partial u_1} + \beta_{21}\gamma_2 + a\beta_{31}\gamma_3 + b\,H_1\varphi = 0 \\ &\frac{\partial\gamma_2}{\partial u_2} + \beta_{12}\gamma_1 + a\beta_{32}\gamma_3 + b\,H_2\varphi = 0 \\ a&\frac{\partial\gamma_3}{\partial u_3} + \beta_{13}\gamma_1 + \beta_{23}\gamma_2 + b\,H_3\varphi = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Paragonando la prima di queste coll'altra $\frac{\partial\gamma_1}{\partial u_2} = \beta_{12}\gamma_2$, ne deduciamo

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(\beta_{12}\gamma_2) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\beta_{21}\gamma_2) + a\frac{\partial}{\partial u_2}(\beta_{31}\gamma_3) + b\frac{\partial}{\partial u_2}(H_1\varphi) = 0\,,$$

che sviluppata colla precedente diventa

$$\frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_2} + a\beta_{31}\beta_{32} + b\,H_1H_2 = 0\,.$$

D'altra parte abbiamo anche

$$\frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\beta_{32} + K\,H_1H_2 = 0\,,$$

indi sottraendo

$$(a-1)\,\beta_{31}\beta_{32} = (K-b)\,H_1H_2\,.$$

Ora, escludendo che si abbia $a = 1$, $b = K$, caso che per le trasformazioni di Ribaucour è privo di significato, ne deduciamo

$$k_0 = \frac{\beta_{31}\beta_{32}}{H_1H_2} = \frac{K-b}{a-1} = \text{cost.}, \tag{11}$$

e quindi: *I sistemi tripli ortogonali cercati debbono essere sistemi di Weingarten.*

E inversamente si può dimostrare che per ogni sistema di Weingarten esistono trasformazioni di Ribaucour le cui funzioni trasformatrici sono legate da un'identità quadratica (9), *una delle due costanti* a, b *restando arbitraria, e l'altra desumendosi dalla* (11).

Supponiamo ora in aggiunta di scegliere i valori iniziali (arbitrarii) di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \varphi$ per modo che s'annulli la costante del secondo membro nella (9). Allora, per le (5), anche le funzioni trasformatrici $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3; \overline{\varphi}$ pel passaggio inverso soddisfano alla stessa condizione

$$\overline{\gamma}_1^2 + \overline{\gamma}_2^2 + a\overline{\gamma}_3^2 + b\overline{\varphi}^2 = 0,$$

e per ciò: *I sistemi tripli ortogonali derivati sono ancora sistemi di Weingarten colla stessa curvatura costante.*

7. Da ultimo vogliamo esaminare il caso particolare dei sistemi di Weingarten in uno spazio pseudosferico, la cui curvatura K si assumerà $= -1$, supponendo che la curvatura (relativa) k_0 delle $u_3 = \text{cost.}$ sia costante positiva e < 1, onde porremo

$$K = -1 \quad , \quad k_0 = \operatorname{sen}^2 \sigma,$$

con σ angolo reale [1]. Secondo le formole stabilite nella mia Memoria sopra citata del 1887, il ds^2 dello spazio avrà la forma

$$ds^2 = \cosh^2\theta\, du_1^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, du_2^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2,$$

la funzione $\theta = \theta(u_1, u_2, u_3)$ essendo assoggettata a soddisfare al seguente sistema differenziale:

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2^2} = \cos^2\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\\
&\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\right) = -\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}\frac{\partial\theta}{\partial u_2} + \cos^2\sigma\cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\\
&\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\right) = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}\frac{\partial\theta}{\partial u_1}\\
&\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3}\right) = \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\frac{\partial\theta}{\partial u_2}\\
&\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3}\right) = -\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\frac{\partial\theta}{\partial u_1} + \cos^2\sigma\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial u_3}.
\end{aligned}\right.$$

La soluzione generale di questo sistema contiene *quattro* funzioni arbitrarie, il che corrisponde geometricamente al fatto che per definire un tale sistema triplo ortogonale si può dare ad arbitrio: 1° una delle superficie

[1] Si osservi che la formola (8) diventa

$$K' = -\left(\frac{\cos^2\sigma}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{c^2}\right),$$

e però anche il secondo spazio S'_3 è pseudosferico.

$u_3 =$ cost. (a curvatura $k_0 = \operatorname{sen}^2\sigma$); 2° una delle curve coordinate (u_3). Notiamo poi che il sistema (A) ammette l'integrale primo quadratico:

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3}\right)^2 - \cos^2\sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 = \text{cost.}$$

Nel caso attuale la relazione (11) da porsi fra le costanti a, b al n. 7 diventa

$$b + \cos^2\sigma + a\operatorname{sen}^2\sigma = 0$$

e viceversa dando qui ad a un qualunque valore (diverso però da $0, 1$) il sistema ai differenziali totali per $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \varphi$ formato dalle generali (4) e dalle (10) è completamente integrabile. Scelti i valori iniziali per modo che sia

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + a\gamma_3^2 + b\varphi^2 = 0\,,$$

il sistema (Σ') derivato per trasformazione di Ribaucour sarà un nuovo sistema di Weingarten colla stessa curvatura costante (n. 6).

8. Se si suppone nulla la costante del secondo membro nella relazione (B), si ha una classe particolare molto notevole di questi sistemi di Weingarten, pei quali

$$\frac{\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2}{H_3^2} = \cos^2\sigma\,,$$

ossia $\dfrac{1}{\varrho_3} = \cos\sigma$, essendo $\dfrac{1}{\varrho_3}$ la flessione delle curve coordinate (u_3); si tratta qui adunque dei *sistemi di Weingarten a flessione costante*.

In tal caso il sistema differenziale (A) si semplifica coll'introduzione di una funzione ausiliaria ω e si scrive (cfr. Mem. cit.):

$$\text{(C)} \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\theta}{\partial u_1} + \frac{\partial\omega}{\partial u_2} = \cos\sigma\operatorname{senh}\theta\cos\omega \quad , \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3} = \cos\sigma\cosh\theta\cos\omega\,\frac{\partial\theta}{\partial u_3} \\ &\frac{\partial\theta}{\partial u_2} - \frac{\partial\omega}{\partial u_1} = \cos\sigma\cosh\theta\operatorname{sen}\omega \quad , \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3} = \cos\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{sen}\omega\,\frac{\partial\theta}{\partial u_3} \end{aligned}\right.$$

Le trasformazioni di Ribaucour che abbiamo sopra considerato cangiano questi sistemi a flessione costante in altri della stessa specie.

Ora, mediante la rappresentazione conforme di Poincaré dello spazio pseudosferico $(K = -1)$ sul semispazio $z > 0$ euclideo, definita dalla forma

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

pel ds^2, trasportiamo i sistemi (Σ) a flessione costante $\dfrac{1}{\varrho_3} = \cos\sigma$ nello spazio euclideo. Le curve immagini coordinate (u_3) avranno la proprietà che i loro circoli osculatori taglieranno il piano limite $z=0$ sotto l'angolo fisso σ, e le superficie immagini $u_3=\text{cost.}$ saranno altrettanti integrali dell'equazione del 2° ordine (cfr. *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, § 222, formola (54):

$$\text{(D)} \qquad z^2\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}+z\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^2}+$$
$$+\frac{1}{1+p^2+q^2}=\operatorname{sen}^2\sigma\,.$$

9. Suppongasi inversamente di avere, nell'ordinario spazio euclideo, un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) tale che i circoli osculatori delle curve coordinate (u_3) taglino sotto l'angolo costante σ $\left(0<\sigma<\frac{\pi}{2}\right)$ un piano fisso, sia $z=0$. In metrica iperbolica, questi sono circoli non euclidei a centro ideale o di curvatura geodetica $\cos\sigma$, onde le curve (u_3) hanno in questa metrica la flessione costante

$$\frac{1}{\varrho_3}=\cos\sigma\,.$$

Ora sussiste in generale il teorema:

Se in un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) dello spazio S_3, a curvatura costante K, le curve (u_3) hanno la flessione costante $\frac{1}{\varrho_3}=c$, il sistema è di Weingarten, e la curvatura relativa k_0 della superficie $u_3=\text{cost.}$ è data dalla formola

$$k_0=-(K+c^2)\,. \tag{12}$$

Per ipotesi si ha

$$\beta_{13}^2+\beta_{23}^2=c^2H_3^2,$$

e derivando rapporto ad u_1, u_2, osservando le formole

$$\frac{\partial\beta_{13}}{\partial u_2}=\beta_{12}\beta_{23}\quad,\quad\frac{\partial\beta_{23}}{\partial u_1}=\beta_{21}\beta_{13}\,,$$

otteniamo le altre

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\beta_{13}}{\partial u_1}&=c^2H_1H_3-\beta_{21}\beta_{13}\\ \frac{\partial\beta_{23}}{\partial u_2}&=c^2H_2H_3-\beta_{12}\beta_{23}\,.\end{aligned}\right.$$

Paragonando colle precedenti, costruiamo la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(\beta_{12}\,\beta_{23}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\beta_{21}\,\beta_{23}) - c^2 \frac{\partial}{\partial u_2}(\mathrm{H}_1\,\mathrm{H}_3) = 0\,,$$

che sviluppata dà

$$\beta_{23}\left\{\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} - c^2\,\mathrm{H}_1\,\mathrm{H}_2\right\} +$$

$$+ \beta_{12}\,\beta_{21}\,\beta_{13} + \beta_{21}(c^2\,\mathrm{H}_2\,\mathrm{H}_3 - \beta_{12}\,\beta_{13}) - c^2\,\beta_{21}\,\mathrm{H}_2\,\mathrm{H}_3 = 0\,.$$

I termini che non contengono β_{23} si elidono, e poichè $\beta_{23} \neq 0$ resta

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} - c^2\,\mathrm{H}_1\,\mathrm{H}_2 = 0\,;$$

d'altronde

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\,\beta_{32} + \mathrm{K}\,\mathrm{H}_1\,\mathrm{H}_2 = 0$$

e paragonando

$$\beta_{31}\,\beta_{32} + (\mathrm{K} + c^2)\,\mathrm{H}_1\,\mathrm{H}_2 = 0\,,$$

che è precisamente la (12).

Se in questo risultato generale facciamo

$$\mathrm{K} = -1 \quad , \quad c = \cos\sigma\,,$$

abbiamo $k_0 = \mathrm{sen}^2\,\sigma$, e perciò il sistema $(u_1\,,\,u_2\,.\,u_3)$ dello spazio iperbolico è un sistema di Weingarten della classe considerata al n. 7, colla flessione costante $\frac{1}{\varrho_3} = \cos\sigma$.

Concludiamo quindi: *Esistono infinite famiglie di Lamé le cui trajettorie ortogonali hanno circoli osculatori che tagliano sotto un angolo costante σ un piano fisso. La loro ricerca dipende dal sistema* (C) *di equazioni a derivate parziali, la cui soluzione generale contiene tre funzioni arbitrarie.*

Si osservi che le superficie $u_3 = \mathrm{cost.}$ di queste famiglie di Lamé sono tutte integrali dell'equazione del 2° ordine (D), del tipo di Monge-Ampère. E le superficie delle altre due famiglie $u_1 = \mathrm{cost.}$, $u_2 = \mathrm{cost.}$, che con la prima completano il sistema triplo ortogonale, hanno la proprietà che i circoli osculatori delle linee di curvatura di un sistema tagliano sotto l'angolo costante σ il piano $z = 0$. Come superficie isolate queste ultime furono studiate direttamente dal Razzaboni [1], con riferimento alle mie antiche ricerche sopra citate, ma nel caso opposto a quello sopra considerato, e cioè quando i circoli osculatori non tagliano realmente il piano fisso (σ puramente immaginario).

[1] Memorie della R. Accademia di Bologna, serie VII, tomo I (1913).