ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

risulta, in base alla (26), per la probabilità $l_{(n)}$, relativa alla coesistenza delle ineguaglianze della successione illimitata

$$(32)\qquad \begin{cases} p - \alpha_n \leq X_{(n)} \leq p + \alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p - \left(\dfrac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot \alpha_n \leq X_{(n+k)} \leq p + \left(\dfrac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot \alpha_n , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

che corrispondono alle (20),

$$(33)\qquad l_{(n)} > 1 - \frac{pq}{\alpha_n^4 \cdot n}\left(1{,}55\,\frac{1-3pq}{n} + 10{,}26\,pq\right).$$

Posto $p = \frac{1}{2}$, $\alpha_n = 0.5$, $n = 100$, risulta $l_{(n)} > 0{,}897$; posto $p = \frac{1}{2}$, $\alpha_n = 0{,}01$, $n = 1.000.000.000$, risulta $l_{(n)} > 0{,}993$.

7. Con linguaggio fisico è lecito dire che la successione (1) del n. 1, al crescere di s, *tende* al limite p; ma per scrivere, nel senso dell'analisi,

$$\lim_{s \to \infty} \frac{b_s}{s} = p,$$

rimangono, dal punto di vista logico, delle lacune impossibili ad essere colmate, sulla qualcosa avrò occasione di ritornare.

Matematica. — *Sur la composition de 1ère espèce: Les fonctions d'ordre quelconque et leur composition.* Nota I di Joseph Pérès, presentata dal Socio V. Volterra.

§ 1. — Introduction.

La théorie de la composition et de la permutabilité de première espèce a d'abord été développée pour les fonctions d'ordre entier positif. Dans un récent Mémoire [1] qui étend considérablement le champ d'application de cette théorie, M.r Volterra envisage d'abord des fonctions d'ordre positif quelconque qui se composent comme des fonctions d'ordre entier. Il définit ensuite, f étant une fonction d'ordre positif, des symboles tels que $\overset{*}{f}{}^0$ et $\overset{*}{f}{}^{-1}$ qui peuvent être considérés comme fonctions d'ordre nul et négatif, et con-

[1] *Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione.* Atti della R. Acc. dei Lincei, serie 5a, vol. XI, fasc. IV.

sidère enfin des fractions de composition. Tous ces symboles $\overset{*}{f}{}^{0}$, $\overset{*}{f}{}^{-1}$, fractions de composition, sont entièrement formels, ainsi que les calculs de composition que l'on peut effectuer sur eux.

Cependant, dans une certaine mesure, ces calculs formels correspondent à des calculs effectués sur des fonctions ordinaires. C'est ainsi par exemple, que, d'après la définition même du symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$, dire que

$$\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{f}{}^{-1}\,\overset{*}{\psi},$$

n'est pas autre chose que dire que φ est la solution de l'équation intégrale

$$\overset{*}{f}\,\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\psi}. \tag{1}$$

Il n'en était pas moins intéressant, théoriquement, comme pratiquement, de réduire autant que possible la part de symbolisme dans la théorie des fonctions d'ordre quelconque.

J'y arrive ici, grâce à une extension très naturelle de la notion de composition. Je prouve ainsi qu'une fonction d'ordre négatif non entier est une fonction au sens ordinaire du mot, dont la composition (généralisée) avec d'autres fonctions, jouit des propriétés classiques. Dans la définition d'une fonction d'ordre nul ou entier négatif, reste forcément un élément formel; je l'ai réduit au minimum.

Comme application je résoud (§ 4) l'équation (1) quels que soient les ordres de f et de ψ, sans avoir à me préoccuper des restrictions relatives à ces ordres que l'on devait faire jusqu'à présent.

J'espère que ces recherches contribueront à montrer l'intérêt des symboles introduits, grâce à une analyse si élégante, par M.r V. Volterra.

§ 2. — Les fonctions d'ordre régulier.

Une fonction de forme

$$f(x.y) = \frac{(y-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\varphi(x.y)$$

α étant un nombre *différent de zéro et d'un entier négatif* et $\varphi(x.x)$ étant différent de zéro [1] sera dite fonction de l'ordre régulier α. Nous admettons, pour simplifier, $\varphi(x.y)$ holomorphe dans un domaine autour d'un point de la droite $x = y$, domaine dans lequel nous nous maintiendrons [2].

[1] Pour le moment, il suffit d'admettre que $\varphi(x,x)$ n'est pas identiquement nul. C'est seulement pour la résolution d'une équation de forme (1), qu'il est utile de supposer $\varphi(x,x)$ constamment différent de zéro.

[2] On peut remplacer, sans rien changer à ce qui suit, cette condition d'holomorphie de φ par l'existence d'un développement limité de Taylor poussé assez loin.

Soit une seconde fonction d'ordre régulier β

$$g(x.y) = \frac{(y-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\gamma(x.y);$$

si de plus $\alpha+\beta$ est également régulier [1], le résultat de leur composition sera

$$\overset{\bullet}{f}\overset{\bullet}{g}(x.y) = \overline{\left|\int_x^y f(x.\xi)\, g(\xi.y)\, d\xi\right.}$$

la barre qui surmonte cette intégrale indiquant qu'il faut en prendre la *partie finie* [2]. L'intégrale précédente

$$\overline{\left|\int_x^y \frac{(y-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,\frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\varphi(x.\xi)\,\gamma(\xi.y)\,d\xi\right.}$$

est donc égale à

$$\lim_{\substack{x_1=x\\ y_1=y}}\left\{\int_{x_1}^{y_1}\frac{(y-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,\frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\varphi(x.\xi)\,\gamma(\xi.y)\,d\xi - \right.$$
$$\left. - A(x_1)\,(x_1-x)^{\alpha} - B(y_1)\,(y-y_1)^{\beta}\right\}$$

x_1 et y_1 tendant indépendamment vers leur limite, A et B étant des fonctions de x_1 et de y_1 [3] respectivement holomorphes autour de $x_1 = x$ et $y_1 = y$ et choisies de façon que la limite existe; cette limite étant indépendante de choix des fonctions A et B [4].

Si α et β sont positifs la partie finie se réduit à l'intégrale ordinaire.

En s'appuyant sur le fait, facile à démontrer, que

$$\overline{\left|\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt\right.} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

quels que soient α et β réguliers, et en suivant à peu près la même méthode

(1) Cette dernière hypothèse, qui n'est pas nécessaire pour que la partie finie ait un sens, est pourtant essentielle, comme on s'en rendra compte.

(2) Je renvoie, pour la définition et les propriétés de la *partie finie* aux travaux de M. Hadamard qui a introduit ce symbole (Annales de l'École Normale, 1905).

(3) On sait que l'on déduit de cette expression de la *partie finie* d'autres expressions, très commodes pour son calcul effectif.

(4) A et B dépendent aussi des variables x et y; elles ne jouent aucun rôle, aussi ne les écrivons nous pas.

que pour les ordres positifs, on obtient les propriétés suivantes, bien connues si α et β sont positifs:

I. $\overset{*}{f}\overset{*}{g}$ est une fonction d'ordre régulier $\alpha+\beta$.

II. On a

$$D(\overset{*}{f}\overset{*}{g}) = D(\overset{*}{f}) \times D(\overset{*}{g})$$

en nommant $D(\overset{*}{f})$, diagonale de $\overset{*}{f}$, la fonction $\varphi(x.x)$ (1).

III. Si les fonctions f et g sont permutables on a

$$\frac{[D(\overset{*}{f})]^{1/\alpha}}{[D(\overset{*}{g})]^{1/\beta}} = \text{constante} \ (2).$$

Enfin on peut établir que la composition, ainsi généralisée, obéit encore aux règles de calcul de la multiplication ordinaire. On établit que

V. $$\overset{*}{f}(\overset{*}{g}+\overset{*}{h}) = \overset{*}{f}\overset{*}{g} + \overset{*}{f}\overset{*}{h} \ (3).$$

Il est un peu plus délicat d'établir que

VI. $$\overset{*}{f}(\overset{*}{g}\overset{*}{h}) = (\overset{*}{f}\overset{*}{g})\overset{*}{h}$$

$\overset{*}{f}, \overset{*}{g}, \overset{*}{h}$ étant 3 fonctions d'ordres réguliers α, β, γ. Il faut bien entendu, supposer aussi que tous les ordres des fonctions qu'il faut envisager pour effectuer les opérations indiquées dans VI sont réguliers: c'est-à-dire que $\beta+\gamma$, $\alpha+\beta$, $\alpha+\beta+\gamma$ sont aussi réguliers.

La proposition VI s'établit indirectement comme il suit: on l'établit d'abord dans les 3 cas particuliers suivants:

$$(1) \quad \begin{cases} \overset{*}{1}(\overset{*}{g}\overset{*}{h}) = (\overset{*}{1}\overset{*}{g})\overset{*}{h} \\ (\overset{*}{f}\overset{*}{g})\overset{*}{1} = \overset{*}{f}(\overset{*}{g}\overset{*}{1}) \\ \overset{*}{f}(\overset{*}{1}\overset{*}{h}) = (\overset{*}{f}\overset{*}{1})\overset{*}{h} \end{cases}$$

(1) M.r Volterra donne de $D(f)$ une définition un peu différente, mais équivalente.

(2) Dans cette équation les puissances représentent des puissances ordinaires et non des puissances de composition. J'avais établi cette formule pour α et β entiers positifs. M.r Volterra l'a récemment démontrée pour α et β positifs quelconques.

(3) Pour que le fonction $\overset{*}{g}+\overset{*}{h}$ soit de celles que nous avons définies au début du § 2, il faut que les ordres de g et h différent d'un entier. Il y a lieu alors de démontrer V et c'est aisé. Si non la formule V sera la définition de $\overset{*}{f}(\overset{*}{g}+\overset{*}{h})$.

ce qui n'offre pas de difficultés grâce à des différentiations sous le signe intégrale et grâce à des intégrations par parties qui se font aisément malgré la présence des signes *partie finie*. On prouve ensuite que démontrer la formule (VI) revient à démontrer la suivante:

$$\dot{1}\,(\dot{f}\,(\dot{g}\,\dot{h}))=\dot{1}\,((\dot{f}\,\dot{g})\,\dot{h})$$

qui s'écrit, grâce à la première des formules (1)

$$(\dot{1}\,\dot{f})\,(\dot{g}\,\dot{h})=((\dot{1}\,\dot{f})\,\dot{g})\,\dot{h}$$

on a ainsi remplacé la fonction f par la fonction $\dot{1}\dot{f}$ d'ordre $\alpha+1$.

En continuant de même, on pourra se ramener au cas où la fonction f est d'ordre positif aussi grand que l'on veut. On pourra, par un procédé analogue, se ramener au cas où la fonction h est d'ordre positif. Mais la fonction f d'ordre grand peut toujours s'écrire $\dot{f}_1\dot{1}$, f_1 étant une nouvelle fonction d'ordre positif et la formule VI, grâce à la troisième des formules (1), s'écrit encore

$$\dot{f}_1\,((\dot{1}\,\dot{g})\,\dot{h})=(\dot{f}_1\,(\dot{1}\,\dot{g}))\,\dot{h}$$

la fonction g est ainsi remplacée par la fonction $\dot{1}\dot{g}$ d'ordre supérieur $\beta+1$. On voit que finalement il suffit d'établir la propriété si f, g, h sont d'ordres positifs; mais alors les signes partie finie disparaissent, il n'y a plus aucune difficulté.

En particulier M.r Volterra a montré [1] que, si ζ est positif quelconque, on peut écrire

$$\dot{1}^{\zeta}=\frac{(y-x)^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)} \tag{2}$$

avec les règles de calcul suivantes:

$$\dot{1}^{\zeta}\,\dot{1}^{\zeta'}=\dot{1}^{\zeta+\zeta'} \qquad (\dot{1}^{\zeta})^{n}=\dot{1}^{\zeta n}. \tag{3}$$

Il n'y a aucune difficulté à étendre la définition (2) et les règles de calcul (3) si ζ, ζ'. $\zeta+\zeta'$, ζn sont réguliers quelconques.

Dans une prochaine Note nous définirons et étudierons les fonctions d'ordre nul ou entier négatif.

[1] Mémoire déjà cité, p. 23.