ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 maggio 1917.

F. D' Ovidio Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Realtà fisica di alcuni spazî normali del Bianchi.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Le equazioni gravitazionali di Einstein sono state integrate rigorosamente da Schwarzschild [1] in un caso di fondamentale importanza (simmetria attorno ad un centro), che rispecchia (colla correzione derivante dalla relatività generale) l'attrazione newtoniana del Sole, rendendo esatto conto del secolare spostamento dei perieli dei pianeti, e segnatamente del perielio di Mercurio: risultato celeberrimo, già in precedenza ottenuto da Einstein mediante una integrazione approssimata (perfettamente bastevole per la valutazione numerica della disuguaglianza).

Indicherò qui un nuovo caso di integrazione non privo di interesse fisico, ponendo a base della mia deduzione le equazioni gravitazionali già ridotte a quella forma (spazialmente invariante) che conviene al caso statico e che fu oggetto di una mia precedente comunicazione [2].

Concettualmente si tratta di questo: Supposto che esista nel vuoto un campo elettrico ovvero magnetico uniforme (e costante anche rispetto al tempo), si domanda se e come un tale campo influisce sulla natura geome-

[1] *Ueber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie*, Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss., 1916, pp. 189-196. Veggasi altresì la recente Memoria di Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (zweite Mitteilung). Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1917.

[2] *Statica einsteiniana*, in questo volume dei Rendiconti, pp. 458-470.

trica dello spazio ambiente. Si trova che lo spazio non resta euclideo (come sarebbe in assenza del campo), ma si atteggia a varietà normale di Bianchi [1] con due curvature principali nulle, e la terza (quella corrispondente alle giaciture normali alle linee del campo) positiva e proporzionale al quadrato dell'intensità del campo. Il fattore di proporzionalità è, naturalmente, assai piccolo. Detta $\frac{1}{R^2}$ la curvatura non nulla, risulta ad es., per un campo magnetico di 25000 gauss, R dell'ordine di una decina di siriametri (siriametro = un milione di volte la distanza media fra la Terra e il Sole). Con tutto ciò non è escluso che qualche conseguenza (per es. il modo di variare della velocità della luce lungo le linee di forza) divenga controllabile con osservazioni di fisica cosmica.

Ad un ulteriore tipo, anche più elementare, di soluzione rigorosa si è condotti (n. 5), prefiggendosi che lo spazio assuma curvatura costante e che vi si esercitino sforzi puramente normali. Questo tipo si collega (n. 6) ad una questione molto dibattuta di statistica stellare, su cui si è testè rivolta l'attenzione di Einstein [2].

1. — Campi elettromagnetici stazionari.

Sia

$$ds^2 = \sum_{ik}^{3} {}_1 \, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

l'espressione, in coordinate generali x_1, x_2, x_3, del quadrato dell'elemento lineare dello spazio fisico in una regione che si suppone sede di fenomeni elettromagnetici. Secondo la teoria di Einstein, questi fenomeni influiscono sulla natura metrica dello spazio, sicchè il ds^2 non sarà, in generale, rigorosamente euclideo. Comunque, in condizioni statiche, seguita a valere, anche nella detta teoria, lo schema elettromagnetico ordinario riferito alla metrica (1).

Ci atterremo al caso elementare in cui il campo consta di una sola delle due forze: elettrica ovvero magnetica. Indichi $X_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ il sistema coordinato covariante di questa forza. Le sue componenti (in generale non ortogonali) secondo il triedro delle linee coordinate saranno in conformità $\frac{X_i}{\sqrt{a_{ii}}}$. Introdotti anche gli elementi reciproci

$$X^{(i)} = \sum_{1}^{3}{}_j\, a^{(ij)}\, X_j \qquad (i = 1, 2, 3),$$

[1] *Sugli spazi normali a tre dimensioni colle curvature principali costanti*, in questi Rendiconti, vol. XXV, 1° semestre 1916, pp. 59-68.

[2] *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss., 1917, pp. 142-152.

porremo

$$8\pi u = \sum_1^3{}_i X^{(i)} X_i . \tag{2}$$

Le misure si intenderanno riferite al sistema elettrostatico assoluto, nel senso di Gauss-Hertz [1] (in cui la costante dielettrica e la permeabilità magnetica si considerano puri numeri, eguali all' unità per il vuoto). Con ciò, in seno ad un mezzo impolarizzabile (aria o vuoto), u rappresenta la densità di energia dovuta alla forza X_i, mentre il relativo tensore maxwelliano degli sforzi rimane definito dal sistema (covariante)

$$T_{ik} = u\, a_{ik} - \frac{1}{4\pi} X_i X_k \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{3}$$

I singoli sforzi specifici (trattati come pressioni) risultano dai rapporti $\dfrac{T_{ik}}{\sqrt{a_{ii}\, a_{kk}}}$, il cui significato, per una data coppia di indici i, k, è: componente ortogonale secondo la linea x_k dello sforzo che si esercita sopra un elemento superficiale normale alla linea x_i (o viceversa).

Dacchè il campo in questione si suppone essenzialmente stazionario, dovremo ritenere le X_i derivanti da un potenziale φ $\left(X_i = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$, escludendo dalle nostre considerazioni, se si tratta di forza magnetica, quelle eventuali porzioni di campo in cui ci sono correnti.

Assumiamo in particolare $\varphi = -Cx_1$ con C costante. Avremo

$$X_1 = C \quad , \quad X_2 = X_3 = 0 ,$$

il che corrisponde ad una forza di intensità $|C|$ diretta secondo le linee x_1.

Se si suppone inoltre che le linee coordinate sieno ortogonali, ossia che il ds^2 abbia la forma

$$H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2 + H_3^2\, dx_3^2 ,$$

si ha dalle (2) e (3)

$$u = \frac{C^2}{8\pi H_1^2} , \tag{2'}$$

$$\begin{cases} \dfrac{T_{11}}{H_1^2} = -u \quad , \quad \dfrac{T_{22}}{H_2^2} = \dfrac{T_{33}}{H_3^2} = u , \\ T_{ik} = 0 \qquad\qquad (i \neq k), \end{cases} \tag{3'}$$

[1] Cfr. per es. Abraham, *Theorie der Elektrizität*, B. I, § 61 [Leipzig, Teubner, 1912 (4ª edizione)].

ciò che rispecchia la caratteristica distribuzione degli sforzi maxwelliani, i quali sono tensioni sugli elementi normali e pressioni sugli elementi paralleli alle linee di forza, colla comune intensità u.

2. — Spazi B) del Bianchi.

Il Bianchi ha chiamato spazi *normali* quelli in cui le tre congruenze costituite dalle linee principali di curvatura risultano normali (ad altrettante famiglie di superficie), ed ha caratterizzato tutti gli spazi normali colle tre curvature principali costanti. Fra questi, a prescindere dal caso classico delle tre curvature eguali (spazi a curvatura costante), ce n'è un solo tipo che diremo B), cui spetta curvatura media $\mathfrak{M}$ positiva [1].

In esso due curvature principali sono nulle, e la terza, positiva, si identifica quindi con $\mathfrak{M}$. Posto

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{R^2} \qquad (\text{con } R > 0)\,,$$

si può attribuire al quadrato dell'elemento lineare l'espressione

$$\text{B)} \qquad dx_1^2 + dx_2^2 + \sin^2 \frac{x_2}{R}\, dx_3^2\,,$$

con riferimento al sistema triplo ortogonale, le cui linee coordinate formano le congruenze principali.

Ciò premesso, ricordo in generale che, ogniqualvolta le congruenze principali sono normali, ove si indichino con ω_i le tre curvature principali e con H_i^2 i coefficienti del ds^2 nella forma ortogonale corrispondente alle dette congruenze, valgono per le α_{ik} del Ricci [2] le espressioni canoniche

$$\alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad , \quad \alpha_{ii} = \omega_i H_i^2 \quad (i = 1\,,2\,,3).$$

Per il ds^2 B), cui spettano le curvature $\omega_1 = \frac{1}{R^2}$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$, si ricava in particolare

$$(4) \qquad \alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad , \quad \alpha_{11} = \frac{1}{R^2} \quad , \quad \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0\,.$$

Ci sarà comodo immaginare rappresentato uno spazio B) nell'ordinario spazio euclideo, interpretando $x_1\,, x_2\,, \frac{x_3}{R}$ come coordinate cilindriche: ordinatamente $z\,, \varrho\,, \vartheta$, il significato di queste ultime lettere essendo manifesto.

(1) Bianchi, loc. cit., pag. 68.

(2) Negli spazi a tre dimensioni, queste α_{ik} sostituiscono con vantaggio i simboli di Riemann a quattro indici. Già ho avuto occasione di richiamarlo nel § 2 della Nota precedente.

Si stabilisce così una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due spazi, pur essendo diverse le loro due metriche. Alla espressione B) del ds^2 fa riscontro, per lo spazio rappresentativo, la determinazione euclidea in coordinate cilindriche

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \left(\frac{x_2}{R}\right)^2 dx_3^2 .$$

Le due forme tendono a coincidere per R molto grande; in modo più preciso, risulta trascurabile il divario, allorchè il rapporto $\frac{x_2}{R}$ è abbastanza piccolo perchè si possa confondere il seno coll'arco. In ogni caso, le linee x_1 ed x_2 (rette parallele all'asse delle z e rette che lo incontrano normalmente, nello spazio rappresentativo) sono geodetiche anche nella metrica B).

3. — Produzione magnetica ovvero elettrostatica di uno spazio B).

Supponiamo che, in una porzione dello spazio ambiente, priva di materia ponderabile, si provochi un campo uniforme, per es. magnetico, come si realizza comodamente nell'interno di un solenoide percorso da corrente costante. Dobbiamo aspettarci (ammessa la relatività generale di Einstein) che lo spazio occupato dal campo non resti rigorosamente euclideo, tale modificazione di struttura geometrica dello spazio potendo implicare a sua volta una qualche (tenuissima) distorsione delle linee di forza, finchè si ristabilisce un completo equilibrio. Si tratta di determinare la natura dello spazio e l'assetto finale del fenomeno, a equilibrio raggiunto.

La risoluzione del problema va naturalmente desunta dalle equazioni generali della statica einsteiniana, in cui si attribuiscano alla densità di energia e agli sforzi le determinazioni corrispondenti al caso specifico.

Ecco in primo luogo le equazioni statiche (sotto la forma spazialmente invariante, di cui il § 2 della Nota precedente):

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{M} = \varkappa u ,$$

$$\text{(II)} \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V} a_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

dove u è la densità di energia $\left(\text{indicata nella precedente comunicazione con } \frac{T_{00}}{V^2}\right)$; V la velocità di propagazione della luce; V_{ik} e $\Delta_2 V$ designano derivate covarianti e parametro di second'ordine riferiti al ds^2 dello spazio ambiente; le α_{ik} sono i corrispondenti simboli di Ricci; $\mathfrak{M} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{(ik)} \alpha_{ik}$

la curvatura media; infine le T_{ik} costituiscono il tensore degli sforzi; e la costante

$$(5) \qquad \varkappa = \frac{8\pi f}{c^4},$$

essendo f la costante di attrazione universale e c la velocità della luce nel vuoto, in assenza d'ogni azione perturbatrice.

Dico che, a regime stabilito, la sede del nostro campo uniforme è uno spazio B), *di cui le linee di forza* (sensibilmente rette) *costituiscono la congruenza principale* (geodetica) x_1, *corrispondente alla curvatura non nulla.*

Per dimostrarlo, basterà verificare che le (I), (II) rimangono soddisfatte, qualora:

1°) vi si introducano per le a_{ik}, α_{ik} le espressioni che loro competono nella metrica B);

2°) si attribuiscano alla densità di energia u e agli sforzi T_{ik} — che, nella supposta assenza di materia, provengono *esclusivamente* dal campo — le espressioni (2′) e (3′) coi valori $1, 1, \sin^2\frac{x_2}{R}$ di H_1^2, H_2^2, H_3^2;

3°) si determini in modo opportuno la funzione V.

In base alla (2′), in cui si faccia $H_1 = 1$, la (I) porge, coincidendo ora $\mathfrak{M}$ con $\frac{1}{R^2}$,

$$(6) \qquad \frac{1}{R^2} = \varkappa u = \frac{\varkappa C^2}{8\pi},$$

e determina così, in funzione dell'intensità del campo, la curvatura dello spazio normalmente alle linee di forza (l'unica che non rimane nulla). Atteso il valore (5) di $\varkappa$, si ricava

$$(6') \qquad R = \frac{c^2}{\sqrt{f}\, C}.$$

Dalla espressione generale delle derivate seconde covarianti

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_1^3{}_l \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} \frac{\partial V}{\partial x_l}$$

segue che, per la forma fondamentale B) e per una funzione della sola x_1, il sommatorio si annulla, talchè le derivate seconde covarianti non differiscono dalle ordinarie, e queste vanno tutte a zero ad eccezione di V_{11} che si riduce a V'' (l'apice indicando derivazione rispetto all'argomento x_1). Si ha poi [coi valori delle $a^{(ik)}$ corrispondenti a B)]

$$\Delta_2 V = \sum_1^3{}_{ik}\, a^{(ik)}\, V_{ik} = V''.$$

Con ciò, quelle delle (II) che corrispondono a indici i, k distinti risultano pure identità. Le altre tre, ossia

$$\alpha_{ii} + \frac{V_{ii}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V} H_i^2 = -\varkappa T_{ii} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dànno, in base alle (3′) e (4),

$$\frac{1}{R^2} = \varkappa u \quad (i = 1) \quad ; \quad \frac{V''}{V} = \varkappa u \quad (i = 2, 3).$$

La prima coincide colla (6), e la seconda, introducendovi per $\varkappa u$ il suo valore $\frac{1}{R^2}$ ed integrando, porge

$$V = c_1 e^{\frac{x_1}{R}} + c_2 e^{-\frac{x_1}{R}} \qquad (c_1, c_2 \text{ costanti}). \tag{7}$$

4. — Ordine di grandezza di R.

Campi magnetici. — L'intensità C praticamente raggiungibile può ammontare a qualche decina di migliaia di gauss. Prendiamo 25000 a titolo di apprezzamento. Esprimendo anche c ed f in unità C. G. S., la (6′) dà R in centimetri. Ora $c = 3 . 10^{10}$, $f = 6{,}6 . 10^{-8}$, sicchè, arrotondando, risulta $R = \frac{3}{2} . 10^{20}$ cm. $= \frac{3}{2} 10^{15}$ Km. Se si nota che $\frac{3}{2} 10^{8}$ Km. è la distanza media Sole-Terra, si arriva alla conclusione che, *per un campo di 25000 gauss, il raggio di curvatura vale dieci milioni di volte la distanza media fra la Terra e il Sole, ossia dieci siriametri.* Esso varia in ragione inversa dell'intensità del campo; ma rimane comunque al di fuori d'ogni attuale possibilità sperimentale il ridurlo a dimensione apprezzabile entro un laboratorio. Non è invece da escludere che qualche altra previsione della teoria, per es. la variazione esponenziale della velocità V della luce lungo le linee di forza, quale risulta dalla (7), divenga osservabile in fisica cosmica.

Campi elettrostatici. — Per la valutazione numerica di R, seguita a valere la formula (6′), purchè l'intensità C del campo sia espressa in unità elettrostatiche. Indichiamo con C_v l'intensità in questione espressa in volt per centimetro. Sarà $10^8 C_v$ la sua misura in unità elettromagnetiche C. G. S.; quindi $C = \frac{1}{c} 10^8 C_v = \frac{1}{300} C_v$ è il numero da introdurre nella (6′), ricavandone, come sopra, R in cm.

Quando pur si attribuiscano a C_v valori tra i più alti finora raggiunti, diciamo $5 . 10^5$ (il che può essere giustificato, pensando che si tratta di campi nel vuoto, sì che non c'è da preoccuparsi delle scariche disruttive), si ha per C il valore $\frac{5}{3}\,10^3$, che è appena la quindicesima parte di quello considerato nel precedente esempio di campo magnetico. Il raggio **R** risulterebbe in conformità 15 volte più grande.

5. — Soluzioni particolari nell'ipotesi che lo spazio assuma una curvatura costante K.

Varranno anzitutto le relazioni geometriche fondamentali

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha_{ik} = \mathrm{K}\, a_{ik} & (i\,,k = 1\,,2\,,3)\,, \\ \mathfrak{M} = 3\mathrm{K}\,, \end{cases}$$

con che la (I) diviene

$$(9)\qquad 3\mathrm{K} = \varkappa u\,.$$

Ne desumiamo $\mathrm{K} \geq 0$, il che rientra nell'osservazione generale della Nota precedente che, in condizioni statiche, la curvatura media $\mathfrak{M}$ è sempre positiva o nulla. La (9) stessa mostra poi che u è necessariamente costante assieme a K, ossia che il mezzo deve presentare una distribuzione uniforme di energia.

Nell'ipotesi che sia uniforme anche la distribuzione degli sforzi e che questi si esplichino normalmente, avremo altresì

$$(10)\qquad \mathrm{T}_{ik} = p\, a_{ik} \qquad (i\,,k = 1\,,2\,,3)\,,$$

con p costante positiva o negativa, secondochè lo sforzo normale cui si trova sottoposto ogni elemento del mezzo ha carattere di pressione ovvero di tensione.

Tenuto conto delle (9) e (10), le (II) divengono

$$(11)\qquad \frac{\mathrm{V}_{ik}}{\mathrm{V}} + \left(\mathrm{K} + \varkappa p - \frac{\Delta_2 \mathrm{V}}{\mathrm{V}}\right) a_{ik} = 0 \qquad (i\,,k = 1\,,2\,,3),$$

a cui si può soddisfare in due modi diversi.

1°. V *costante*. — In tal caso è necessario e basta aggiungere alla (9) la condizione

$$(12)\qquad \mathrm{K} + \varkappa p = 0\,.$$

Dal loro confronto segue $p = -\frac{1}{3}u$, e si è condotti al seguente enunciato:

Entro un mezzo omogeneo uniformemente stirato con una trazione $\frac{1}{3}u$ (u densità dell'energia), lo spazio assume curvatura costante positiva $\mathrm{K} = \frac{\varkappa}{3}u$, la velocità della luce conservandosi costante.

Si noterà tuttavia che un tale mezzo non potrebbe essere costituito da materia ordinaria, nè allo stato fluido, nè allo stato solido. Non allo stato fluido, perchè gli sforzi interni in tale stato hanno sempre carattere di pressioni; e nemmeno allo stato solido, perchè l'ordine di grandezza della trazione $\frac{u}{3}$ è ben superiore ai limiti di rottura. Un apprezzamento numerico si ha immediatamente, pensando che, detta μ la densità materiale di un eventuale mezzo solido nelle condizioni supposte, sarebbe sensibilmente $u = c^2 \mu$ e si tratterebbe quindi di una trazione di $\frac{1}{3} c^2 \mu = 3 . 10^{20} . \mu$ dine per cm².

2°. V *variabile*. — Dalle (11), moltiplicate per $a^{(ik)}$ e sommate rispetto ai due indici i e k, segue in primo luogo

$$\frac{\Delta_2 \mathrm{V}}{\mathrm{V}} + 3\left(\mathrm{K} - \frac{\Delta_2 \mathrm{V}}{\mathrm{V}} + \varkappa p\right) = 0,$$

ossia

$$\frac{\Delta_2 \mathrm{V}}{\mathrm{V}} = \tfrac{3}{2}(\mathrm{K} + \varkappa p).$$

Le (11) stesse equivalgono quindi a

$$\frac{\mathrm{V}_{ik}}{\mathrm{V}} + \mathrm{K}^* a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{13}$$

dove si è posto per brevità

$$\mathrm{K}^* = \mathrm{K} - \tfrac{1}{2}(3\mathrm{K} + \varkappa p).$$

È facile riconoscere che le (13) risultano effettivamente compatibili, per V *non* costante, anzi costituiscono un sistema completo rispetto alla stessa V, considerata come funzione incognita, allora e allora soltanto che $\mathrm{K}^* = \mathrm{K}$ (¹).

(¹) Per stabilirlo, conviene ricordare [Ricci e Levi-Civita, Math. Ann., vol. 54, 1900, pag. 143] che le derivate seconde covarianti d'ogni sistema semplice V_i verificano le relazioni

$$\mathrm{V}_{ikl} - \mathrm{V}_{ilk} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a_{kl,ji}\, a^{(jh)} \mathrm{V}_h \qquad (i, k, l = 1, 2, 3).$$

Ricorriamo ai sistemi E, e da un lato sostituiamo, ai simboli di Riemann, le $\alpha^{(pq)}$ di Ricci, a norma della formula

$$a_{kl,ji} = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, \alpha^{(pq)} \varepsilon_{pkl} \varepsilon_{qji};$$

teniamo conto d'altro lato che, nel caso presente, $\alpha^{(pq)} = \mathrm{K}\, a^{(pq)}$, talchè si può anche porre

$$\alpha^{(pq)} = \frac{\mathrm{K}}{2} \sum_{1}^{3}{}_{\nu\rho\sigma\tau}\, a_{\nu\sigma} a_{\rho\tau} \varepsilon^{(p\nu\rho)} \varepsilon^{(q\sigma\tau)}.$$

Avuto riguardo alle identità

$$\sum_{1}^{3}{}_{p}\, \varepsilon^{(p\nu\rho)} \varepsilon_{pkl} = \varepsilon_{\nu k} \varepsilon_{\rho l} - \varepsilon_{\nu l} \varepsilon_{\rho k} \qquad (\nu, \rho, k, l = 1, 2, 3),$$

Ciò richiede

$$3\mathrm{K} + \varkappa p = 0\,, \tag{14}$$

che, associata alla (9), porge $p = -u$, e dà luogo alle stesse considerazioni qualitative di poc'anzi.

Per l'integrazione delle (13), giova prendere il ds^2 (che ha per ipotesi la curvatura costante K) sotto la forma tipica [1]

$$\frac{1}{\psi^2}\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{15}$$

con

$$\psi = 1 + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{K}\,.\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,. \tag{16}$$

Per le derivate covarianti V_{ik} si ricavano subito (dalla formula di definizione) le espressioni esplicite

$$\mathrm{V}_{ik} = \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_i\,\partial x_k} + \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_k}\right) - \frac{\varepsilon_{ik}}{\psi}\sum_1^3{}_l\,\frac{\partial\psi}{\partial x_l}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_l}$$

col solito significato delle ε_{ik} (0 per $i \neq k$, 1 per $i = k$).

---

che giova aver presenti anche sotto la forma

$$\sum_1^3{}_q\,\varepsilon^{(q\sigma\tau)}\,\varepsilon_{qji} = \varepsilon_{\sigma j}\,\varepsilon_{\tau i} - \varepsilon_{\sigma i}\,\varepsilon_{\tau j} \qquad (\sigma\,,\tau\,,j\,,i = 1\,,2\,,3)\,,$$

e in cui, ben si intende, le ε a due indici valgono zero o uno secondochè questi indici sono distinti o coincidono, risulta

$$\mathrm{V}_{ikl} - \mathrm{V}_{ilk} = \frac{\mathrm{K}}{2}\sum_1^3{}_{jh\nu\rho\sigma\tau}\,a_{\nu\sigma}\,a_{\rho\tau}\,a^{(jh)}\,\mathrm{V}_h\,(\varepsilon_{\nu k}\,\varepsilon_{\rho l} - \varepsilon_{\nu l}\,\varepsilon_{\rho k})(\varepsilon_{\sigma j}\,\varepsilon_{\tau i} - \varepsilon_{\sigma i}\,\varepsilon_{\tau j}) = \mathrm{K}\,(a_{il}\,\mathrm{V}_k - a_{ik}\,\mathrm{V}_l)\,.$$

Nell'ipotesi che le V_i sieno le derivate d'una funzione V che verifica le (13), si ha, dalle (13) stesse, moltiplicando per V e derivando covariantemente,

$$\mathrm{V}_{ikl} = -\,\mathrm{K}^*\,a_{ik}\,\mathrm{V}_l\,,$$

che, introdotte nelle precedenti, dànno luogo alle condizioni di integrabilità:

$$(\mathrm{K} - \mathrm{K}^*)\,(a_{il}\,\mathrm{V}_k - a_{ik}\,\mathrm{V}_l) = 0\,,$$

per ogni terna di indici $i\,,k\,,l$.

Dacchè, per ipotesi, V è un'effettiva funzione, una almeno delle sue derivate, diciamo per es. V_k, sarà diversa da zero. Fissiamo, nelle equazioni testè stabilite, questo valore di k e un valore di l diverso da k; e moltiplichiamo per $a^{(ik)}$, sommando rispetto all'indice i. Ricaveremo

$$(\mathrm{K} - \mathrm{K}^*)\,\mathrm{V}_k = 0\,,$$

donde appunto $\mathrm{K} - \mathrm{K}^* = 0$,

c. d. d.

[1] Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, pag. 345 [Pisa, Spoerri, 1902].

Portando nelle (13) e badando alla forma (15) del ds^2, nonchè alla (16), si ha in primo luogo

$$\frac{\partial^2(\psi V)}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0 \qquad (i \neq k),$$

donde apparisce che

$$W = \psi V$$

dev'essere a variabili separate (somma di tre funzioni, una della sola x_1, una della sola x_2 e una della sola x_3).

Le rimanenti (13), in cui, ben si intende, si faccia $K^* = K$, dànno

$$\psi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} - \psi \sum_1^3{}_l \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \frac{\partial V}{\partial x_l} + KV = 0,$$

ossia

$$\psi \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} W - \sum_1^3{}_l \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \frac{\partial W}{\partial x_l} + \left\{ K + \sum_1^3{}_l \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_l} \right)^2 \right\} \frac{W}{\psi} = 0.$$

In virtù della (16),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = \tfrac{1}{2} K \quad , \quad K + \sum_1^3{}_l \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_l} \right)^2 = K\psi,$$

talchè in definitiva l'ausiliaria W (a variabili separate) si trova sottoposta alle tre condizioni

$$\psi \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} - \sum_1^3{}_l \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \frac{\partial W}{\partial x_l} + \tfrac{1}{2} KW = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

con $\psi = 1 + \frac{1}{4} K . (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Data questa forma di ψ, ogni $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2}$ deve ridursi ad una costante, e risulta subito che la più generale soluzione è

$$W = b_0 \left\{ \tfrac{1}{4} K . (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 1 \right\} + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3,$$

le b designando costanti arbitrarie. Con tale espressione di W,

$$V = \frac{1}{\psi} W$$

costituisce in conformità l'integrale generale delle (13).

6. — Termine addizionale recentemente proposto da Einstein.

Riflessioni statistiche sulla distribuzione asintotica della materia nell'universo stellare hanno indotto Einstein (¹) a saggiare l'introduzione di un

(¹) La stessa ipotesi di una distribuzione quasi uniforme di materia nel mondo suggerì all'Almansi interessanti specificazioni positive e formali, inquadrabili nell'ordinario schema newtoniano. Cfr. *Le equazioni fondamentali della Dinamica e la legge di gravitazione* nelle Memorie di questa Accademia (Vol. IX, 1913, pp. 473-502).

piccolo termine correttivo (perfettamente compatibile coi postulati della relatività generale) nelle sue equazioni fondamentali. Queste erano (con referenza al ds^2 quadridimensionale)

(E) $$G_{ik} - \tfrac{1}{2} G g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3);$$

e dovrebbero modificarsi come segue:

(E′) $$G_{ik} - (\tfrac{1}{2} G + \lambda) g_{ik} = -\varkappa T_{ik},$$

λ designando una costante universale positiva.

In condizioni statiche, la forma quaternaria

$$\sum_{0}{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

si riduce a

$$V^2 dx_0^2 - ds^2 = V^2 dx_0^2 - \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

ed è opportuno mettere in evidenza la metrica spaziale.

Se, in luogo delle (E), si accettano le (E′), si hanno, in luogo delle (I) e (II), queste equazioni statiche [1]:

(I′) $$\mathfrak{M} - \lambda = \varkappa u,$$

(II′) $$\alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \left(\frac{\Delta_2 V}{V} + \lambda\right) a_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Dacchè $\lambda > 0$, la (I′) mostra che il termine complementare rende verificata *a fortiori* (escludendo il caso limite $\mathfrak{M} = 0$) la proprietà generale dello spazio fisico (da noi rilevata al § 1 della precedente Nota) di non poter mai assumere in condizioni statiche curvatura media negativa.

Se poi si introducono le ipotesi particolari del n. 5, supponendo che si tratti di spazio a curvatura costante K, sottoposto a sforzi normali, con che valgono le (8) e (10), le (I′) e (II′) assumono l'aspetto

(9′) $$3K - \lambda = \varkappa u,$$

(11′) $$\frac{V_{ik}}{V} + \left(K + \varkappa p - \frac{\Delta_2 V}{V} - \lambda\right) a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Queste corrispondono manifestamente alle (9) e (11) del n. prec., identificandosi con esse per $\lambda = 0$. La discussione si fa nello stesso modo, col

[1] Il passaggio dalle (E′) alle (I′), (II′) si fa esattamente come dalla forma originaria (E) alle (I), (II) [§§ 1-2 della Nota prec., già più volte citata]: basta soltanto tener conto del termine addizionale in λ.

vantaggio che la presenza della costante λ lascia un certo margine a valori positivi di p.

Occupiamoci in particolare delle soluzioni, per cui V è costante. Alla (9') dovremo associare la

$$\text{(12')} \qquad K + \varkappa p = \lambda \,,$$

talchè, eliminando K, otteniamo

$$\text{(17)} \qquad 3\varkappa p = 2\lambda - \varkappa u \,.$$

Per $p = 0$, si ha la soluzione particolare di Einstein

$$\bar{u} = \frac{2\lambda}{\varkappa} \quad , \quad \bar{K} = \lambda \,,$$

che caratterizza la distribuzione media $\bar{u}$ di energia (e quindi di materia) nell'intero spazio, supposto che esso sia (tranne divergenze locali) dotato di una curvatura costante, e riempito (in modo statisticamente uniforme) di materia incoerente, tra le cui particelle non si esercitano sforzi molecolari.

La (17) mostra che si può generalizzare la soluzione di Einstein, assumendo a piacere il valore di u (costante e ≥ 0). Con ciò si conserva la piena uniformità delle caratteristiche geometriche e meccaniche, ma non l'assenza di sforzi normali. Questi si esplicano come pressioni per $u < \bar{u}$, come tensioni per $u > \bar{u}$. Ragionevoli induzioni sul comportamento della materia, per quanto diffusa, portano ad escludere la seconda eventualità: $\bar{u}$ si presenta quindi come un limite superiore della densità media di energia attribuibile all'universo stellare. Sia per ciò, che per l'assenza di sforzi che la caratterizza, la soluzione di Einstein presenta senza dubbio il maggior interesse speculativo.

Matematica. — *Sovra una particolare classe di equazioni integrali singolari.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

1. In altre Note (questi Rend. a. c.) ci siamo occupati di certe equazioni integrali singolari i cui nuclei sieno funzioni di combinazioni lineari delle variabili.

In questa Nota tratteremo delle equazioni che si riattaccano alla precedente classe, essendo l'estensione di un particolare tipo di essa.

Noi considereremo dunque le equazioni:

$$\{A\} \qquad \varphi(x) + \lambda \Sigma a'_r \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b_r |x - \varepsilon'_r s'_r|} \varphi(s'_r)\, ds'_r = f(x)$$