# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXVI.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

vantaggio che la presenza della costante $\lambda$ lascia un certo margine a valori positivi di $p$.

Occupiamoci in particolare delle soluzioni, per cui V è costante. Alla (9') dovremo associare la

$$K + \varkappa p = \lambda, \tag{12'}$$

talchè, eliminando K, otteniamo

$$3\varkappa p = 2\lambda - \varkappa u. \tag{17}$$

Per $p = 0$, si ha la soluzione particolare di Einstein

$$\bar{u} = \frac{2\lambda}{\varkappa}, \quad \bar{K} = \lambda,$$

che caratterizza la distribuzione media $\bar{u}$ di energia (e quindi di materia) nell'intero spazio, supposto che esso sia (tranne divergenze locali) dotato di una curvatura costante, e riempito (in modo statisticamente uniforme) di materia incoerente, tra le cui particelle non si esercitano sforzi molecolari.

La (17) mostra che si può generalizzare la soluzione di Einstein, assumendo a piacere il valore di $u$ (costante e $\geq 0$). Con ciò si conserva la piena uniformità delle caratteristiche geometriche e meccaniche, ma non l'assenza di sforzi normali. Questi si esplicano come pressioni per $u < \bar{u}$, come tensioni per $u > \bar{u}$. Ragionevoli induzioni sul comportamento della materia, per quanto diffusa, portano ad escludere la seconda eventualità: $\bar{u}$ si presenta quindi come un limite superiore della densità media di energia attribuibile all'universo stellare. Sia per ciò, che per l'assenza di sforzi che la caratterizza, la soluzione di Einstein presenta senza dubbio il maggior interesse speculativo.

## Matematica. — *Sovra una particolare classe di equazioni integrali singolari.* Nota di Giulio Andreoli, presentata dal Socio Vito Volterra.

1. In altre Note (questi Rend. a. c.) ci siamo occupati di certe equazioni integrali singolari i cui nuclei sieno funzioni di combinazioni lineari delle variabili.

In questa Nota tratteremo delle equazioni che si riattaccano alla precedente classe, essendo l'estensione di un particolare tipo di essa.

Noi considereremo dunque le equazioni:

$$\varphi(x) + \lambda \Sigma a'_r \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b_r |x - \varepsilon'_r s'_r|} \varphi(s'_r)\, ds'_r = f(x) \tag{A}$$

ove le $\varepsilon'_r$ sieno della radice $\nu_r$-esime dell'unità, $a_r$, $b_r$, costanti e la $s'_r$ varii da $-\infty$ a $+\infty$ in modo che $\varepsilon'_r s'_r$ resti sempre reale.

2. Cominciamo dal trattare il caso più semplice: che cioè le $\varepsilon'_r$ sieno tutte eguali all'unità e che $f(x) \equiv 0$.

Premettiamo perciò il

Teorema I. — *Se esiste la funzione* $\varphi$ (che sarà derivabile almeno due volte, allora) *tale che*:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s)\, ds = 0,$$

*essa è eguale ad una certa combinazione di esponenziali*

$$\varphi(x) = \Sigma\, k_r\, e^{\gamma_r x}.$$

Infatti, noi abbiamo

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s)\, ds =$$

$$= \varphi(x) + \lambda \int_{x}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s)\, ds + \lambda \int_{-\infty}^{x} e^{b|x-s|} \varphi(s)\, ds =$$

$$= \varphi(x) + \lambda e^{-b} \int_{x}^{+\infty} e^{bs} \varphi(s)\, ds + \lambda e^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs} \varphi(s)\, ds = 0.$$

Derivando una volta, si ottiene:

$$\varphi'(x) + \lambda \Big\{ -b e^{-bx} \int_{x}^{+\infty} e^{bs} \varphi(s)\, ds +$$

$$+ b e^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs} \varphi(s)\, ds - e^{-bx} . e^{bx} \varphi(x) + e^{bx} e^{-bx} \varphi(x) \Big\} = 0,$$

da cui, riducendo:

$$\varphi'(x) + \lambda \Big\{ -b e^{-bx} \int_{x}^{+\infty} e^{bs} \varphi(s)\, ds + b e^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs} \varphi(s)\, ds \Big\} = 0.$$

Derivando una seconda volta, avremo:

$$\varphi''(x) + \lambda \Big\{ b^2 e^{-bx} \int_{x}^{+\infty} e^{bs} \varphi(s)\, ds +$$

$$+ b^2 e^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs} \varphi(s)\, ds + b\, e^{-bx} e^{bx} . \varphi(x) + b e^{bx} e^{-bx} \varphi(x) \Big\} = 0,$$

cioè:

$$\varphi''(x) + \lambda \Big\{ b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s)\, ds + 2b\, \varphi(x) \Big\} = 0$$

ed infine, per l'equazione da cui siamo partiti:

$$\varphi''(x) - b^2 \varphi(x) + 2\lambda b \varphi(x) = 0$$

che dimostra l'assunto.

Ne segue il

Teorema II. — *L'equazione*

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma a_r e^{b_r |x-s|} \varphi(s) ds = 0$$

*ammette soltanto soluzioni della forma:*

$$\varphi(x) = \Sigma h_r e^{\gamma_r x}$$

*ove le $\gamma_r$ soddisfano all'equazione:*

$$1 - \lambda \Sigma \frac{2b_r a_r}{b_r^2 - \gamma^2} = 0 \quad ; \quad -b_r > \gamma > b_r .$$

Si potrebbe poi mostrare facilmente che, se una delle $\gamma$ fosse multipla d'ordine $\nu + 1$, al posto della costante $h$ relativa, subentra un polinomio arbitrario d'ordine $\nu$.

La prima parte del teorema II è immediata. Per dimostrare la seconda, si osservi che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} e^{\gamma s} ds = \int_{x}^{+\infty} e^{-bx} e^{(b+\gamma)s} ds + \int_{-\infty}^{x} e^{bx} e^{(-b+\gamma)s} ds .$$

Per la convergenza degli integrali (e perchè quindi l'integrale primitivo sia proprio) occorre e basta che $b + \gamma$ sia negativo e $-b + \gamma$ positivo: ciò che dà appunto

$$-b > \gamma > b .$$

Se qualcuna delle $b$ fosse positiva, non vi sarebbero valori reali (e complessi anche) di $\gamma$ soddisfacenti a tali condizioni: epperò le $b$ devono necessariamente essere negative.

Se poi le $a$, $b$, $\gamma$ fossero complesse, nelle diseguaglianze precedenti figurerebbero le loro parti reali.

Intanto, gli integrali dianzi scritti sono rispettivamente eguali a:

$$-\frac{e^{-bx} e^{(b+\gamma)x}}{b+\gamma} = -\frac{e^{\gamma x}}{b+\gamma} \quad ; \quad \frac{e^{bx} e^{(-b+\gamma)x}}{\gamma - b} = \frac{e^{\gamma x}}{\gamma - b} .$$

Ne segue quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} e^{\gamma s} ds = \left\{ \frac{-1}{b+\gamma} + \frac{1}{\gamma - b} \right\} e^{\gamma x} = \frac{-2b}{b^2 - \gamma^2} e^{\gamma x} .$$

Quest' ultima formola trae seco, come agevole conseguenza, la seconda parte del teorema.

3. Se dunque abbiamo:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|} \varphi(s)\, ds = 0 ,$$

l'equazione algebrica caratteristica sarà

$$1 + \frac{2\lambda}{1-\gamma^2} = 0 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{1+2\lambda} \quad , \quad -1 < \gamma < 1 .$$

Se $\lambda > -{}^1/_2$, le due radici sono reali; ma per la diseguaglianza scritta si vede che per $\lambda > 0$ non vi possono essere soluzioni.

Quindi, per

$$0 > \lambda > -\tfrac{1}{2}$$

la soluzione dell'equazione dianzi scritta è $e^{-\sqrt{1+2\lambda}\, x}$.

Se $\lambda < -\frac{1}{2}$, $\gamma$ sarà immaginario; quindi la soluzione generale sarà $c_1 \operatorname{sen}(i\gamma x + c_2)$ con $c_1$, $c_2$ costanti arbitrarie.

Per $\lambda > 0$ gli integrali non convergono.

Quindi, mentre per $|\lambda| > {}^1/_2$ può esistere una soluzione limitata, per $|\lambda| < {}^1/_2$ essa certamente non esiste.

Ed in effetto, se applichiamo le considerazioni svolte nella già citata Nota, si trova che la costante $k$, è data da:

$$k = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-|x-s|}|\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|}\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|}\, ds = 2\int_{-\infty}^{0} e^{s}\, ds = 2.$$

Quindi la $|\lambda k| < 1$, dà proprio $|\lambda| < {}^1/_2$ come condizione sufficiente, ma non necessaria, per la non esistenza di soluzioni limitate dell'equazione omogenea scritta.

4. Passiamo ora a trattare le equazioni più generali (A). In esse si deve implicitamente supporre che $f(x)$, $\varphi(x)$ sieno definite oltre che sull'asse reale, su tutte le rette $\varepsilon'_r \sigma$ ($\sigma$ reale).

Con una semplice trasformazione di variabili, potremo poi ridurre la (A) al tipo:

$$\text{(B)} \quad \varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma a_r e^{b_r|x-s|} \varphi(\varepsilon_r s)\, ds = f(x) \quad [s \text{ reale};\ \varepsilon_r^{\nu_r} = 1].$$

Vale allora il

Teorema III. — *Se esiste una soluzione dell'equazione omogenea:*

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(\varepsilon s)\, ds = 0 \quad (\varepsilon^{\nu} = 1),$$

*essa è una combinazione lineare di esponenziali.*

Infatti, abbiamo che:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(\varepsilon s)\, ds =$$

$$= \varphi(x) + \lambda \left\{ e^{-bx} \int_{x}^{\infty} e^{bs} \varphi(\varepsilon s)\, ds + e^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs} \varphi(\varepsilon s)\, ds \right\} = 0,$$

da cui, derivando:

$$\varphi'(x) + \lambda \left\{ - b e^{-bx} \int_{x}^{+\infty} e^{bs} \varphi(\varepsilon s)\, ds + \right.$$

$$\left. + b e^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs} \varphi(\varepsilon s)\, ds - e^{-bx} e^{bx} \varphi(\varepsilon x) + e^{bx} e^{-bx} \varphi(\varepsilon x) \right\} = 0,$$

cioè

$$\varphi'(x) + \lambda \left\{ - b e^{-bx} \int_{x}^{+\infty} e^{bs} \varphi(\varepsilon s)\, ds + b e^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs} \varphi(\varepsilon s)\, ds \right\} = 0.$$

Con una seconda derivazione otteniamo agevolmente:

$$\varphi''(x) + \lambda b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(\varepsilon s)\, ds + 2\lambda b \varphi(\varepsilon x) = 0,$$

cioè

$$\varphi''(x) - b^2 \varphi(x) + 2\lambda b \varphi(\varepsilon x) = 0.$$

Indicando con

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_r(x) = \varphi_0(x),\ \ (\varphi_{r+h} = \varphi_h),$$

rispettivamente le funzioni:

$$\varphi(x),\ \varphi(\varepsilon x),\ \varphi(\varepsilon^2 x),\ \ldots,\ \varphi(\varepsilon^r x) = \varphi(x),$$

tale equazione diventa:

$$\frac{1}{\varepsilon^2 \varrho} \varphi_\rho''(x) - b^2 \varphi_\rho(x) + 2\lambda b \varphi_{\rho+1}(x) = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r).$$

Si vede quindi che $\varphi(x)$ soddisfa ad un certo sistema di equazioni differenziali: ed è, anzi, una particolare combinazione lineare di esponenziali, a coefficienti legati da certe relazioni, a causa delle relazioni assegnate fra le $\varphi_\rho$.

In modo del tutto analogo si dimostrerebbe il

Teorema IV. — *Se esiste una funzione* $\varphi(x)$, *soluzione della*:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma a_r e^{b_r|x-s|} \varphi(\varepsilon_r s)\, ds = 0$$

*essa è una certa combinazione lineare* (i cui coefficienti sono legati da

date relazioni) *di esponenziali* $e^{\gamma x}$. *Le* $\gamma$ *soddisfano alla lor volta una certa equazione algebrica, e certe diseguaglianze.*

La prima parte di questo teorema è immediata. Per la seconda sostituiamo a $\varphi(x)$, $e^{\gamma x}$.

Avremo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b_r|x-s|}\varphi(\varepsilon_r s)\,ds = \int_{x}^{+\infty} e^{-b_r x}\, e^{b_r s}\, e^{\varepsilon_r \gamma s}\,ds + \int_{-\infty}^{x} e^{b_r x}\, e^{-b_r s}\, e^{\varepsilon_r \gamma s} =$$

$$= -\frac{e^{-b_r x}\, e^{b_r x}\, e^{\varepsilon_r \gamma x}}{b_r + \varepsilon_r \gamma} + \frac{e^{b_r x}\, e^{-b_r x}\, e^{\varepsilon_r \gamma x}}{-b_r + \varepsilon_r \gamma} = e^{\varepsilon_r \gamma x}\left\{\frac{1}{\varepsilon_r \gamma - b_r} - \frac{1}{\varepsilon_r \gamma + b_r}\right\}.$$

Ciò mostra che se la soluzione contiene un termine $e^{\gamma x}$, dovrà contenere anche tutti i termini $e^{\varepsilon_r \gamma x}$, e dà il modo per formare il sistema di equazioni — algebrico per le $\gamma$, e lineare pei coefficienti — da soddisfare.

Le limitazioni, poi, necessarie alla convergenza degli integrali, sono date dalle

$$\textit{parte reale di } (b_r + \varepsilon_r \gamma) < 0 \quad ; \quad \textit{parte reale di } (-b_r + \varepsilon_r \gamma) > 0$$
$$(r = 1, 2, \ldots),$$

valevoli contemporaneamente per tutte le $\gamma$ che figurano nella soluzione.

5. Infine, nel caso, che non sia $f(x) \equiv 0$, le equazioni integrali sovrascritte, si ridurrebbero ad equazioni differenziali-funzionali non omogenee, usando sempre tale procedimenti. Tali equazioni poi, con l'introduzione di $\varphi(x)$, $\varphi(\varepsilon x)$, $\varphi(\varepsilon^2 x)$, ... si ridurrebbero a sistemi di equazioni differenziali non omogenee, con delle condizioni accessorie.

Quindi ,il tipo della soluzione generale, in tale caso, resta fissato in modo non dubbio.

Se però, in particolare, la $f(x)$ si può rappresentare con:

$$f(x) = \sum_{\rho} p_\rho\, e^{h_\rho x},$$

si avrà subito (trascurando le quistioni di convergenza) che;

$$\varphi(x) = \sum_{\rho} q_\rho\, e^{h_\rho x} + \mathrm{H}(x),$$

ove $\mathrm{H}(x)$ sia soluzione della corrispondente equazione singolare omogenea.

Devono però essere soddisfatte le relazioni derivanti dall'equazione data; si deve dunque avere:

$$\sum_{\rho} q_\rho\, e^{h_\rho x} + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{r,\rho} a_r\, e^{b_r|x-s|}\, q_\rho\, e^{h_\rho \varepsilon_r s}\,ds = \sum p_\rho\, e^{h_\rho x}.$$

Ma, uno dei termini sotto integrale, dà luogo (eseguendo l'integrazione) al termine:

$$a_r\, q_\rho \cdot e^{k_\rho \varepsilon_r x} \cdot \left\{ -\frac{1}{b_r + \varepsilon_r k_\rho} + \frac{1}{-b_r + \varepsilon_r k_\rho} \right\}.$$

Occorre quindi che il sistema di quantità $h_\rho$ sia compreso nel sistema $k_\rho$; $\varepsilon_r k_\rho$; le relazioni intercedenti poi fra i coefficienti si vedono facilmente. Condizioni simili si otterrebbero sostituendo alle funzioni $f$ rappresentabili mediante serie di Fourier, altre rappresentabili mediante integrali di Fourier.

6. Ad esempio di quanto precede, trattiamo l'equazione:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x+s|} \varphi(s)\, ds = 0 .$$

Avremo cioè:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-x}^{\infty} e^{-x} . e^{-s} \varphi(s)\, ds + \lambda \int_{-\infty}^{-x} e^{x} e^{s} \varphi(s)\, ds = 0 .$$

Derivando due volte avremo quindi:

$$\varphi''(x) - \varphi(x) + 2\varphi(-x) = 0 ,$$

da cui:

$$\varphi''(-x) - \varphi(-x) + 2\varphi(+x) = 0$$

poichè $\varepsilon = -1$ ; $\varphi_0(x) = \varphi(x)$ ; $\varphi_1(x) = \varphi(-x)$.

Si vede subito che bisogna porre, come soluzione del sistema:

$$\varphi(x) = me^{\gamma x} + ne^{-\gamma x}$$

ed avere quindi:

$$(m\gamma^2 e^{+\gamma x} + n\gamma^2 e^{-\gamma x}) - (me^{+\gamma x} + ne^{-\gamma x}) + 2(ne^{+\gamma x} + me^{-\gamma x}) = 0$$
$$(m\gamma^2 e^{-\gamma x} + n\gamma^2 e^{+\gamma x}) - (me^{-\gamma x} + ne^{+\gamma x}) + 2(me^{-\gamma x} + ne^{+\gamma x}) = 0 .$$

Tali equazioni sono soddisfatte sempre e solo quando è soddisfatto il sistema indeterminato:

$$m\gamma^2 - m - 2n = 0$$
$$n\gamma^2 - n - 2m = 0 .$$

Posto $m = \mu n$, si ha subito l'altro sistema determinato:

$$\mu\gamma^2 - \mu - 2 = 0$$
$$\gamma^2 - 1 - 2\mu = 0 .$$

Tale sistema impone che $\frac{1}{\mu} = \mu$: e quindi $\mu = \pm 1$.

In corrispondenza si hanno per $\gamma$ i valori $\gamma = \pm\sqrt{3}$ ; $\gamma = \pm i$.

Epperò la soluzione generale dell'equazione singolare scritto si otterrà con tali elementi.

Le condizioni per la convergenza sono:

parte reale di $(-1-\gamma) < 0$ ; parte reale di $(+1-\gamma) > 0$.

Le radici $\gamma = \pm i$ soddisfano a tali condizioni, essendo nulla la parte reale; non vi soddisfano invece le altre due.

Resta quindi, come soluzione generale della equazione scritta unicamente una combinazione lineare di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$: e precisamente, tenuto conto delle relazioni fra i coefficienti, dedotte dall'equazione differenziale, resta il solo $\cos x$.

In altri lavori tratteremo delle equazioni integro-differenziali di tale tipo, e del caso che le $\varepsilon$ non sieno radici dell'unità.

## Matematica. — *Sulle omografie riemanniane di una matrice di Riemann.* Nota di Salvatore Cherubino, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Secondo un teorema recentemente stabilito dal Rosati, ad ogni corrispondenza algebrica *speciale*, situata sopra una curva di genere $p > 1$, sono *associati* due sistemi regolari di integrali abeliani riducibili (di 1ª specie). Se la *specie* della corrispondenza è $p - q$, questi due sistemi hanno le dimensioni rispettive $p - q - 1$ e $q - 1$ (1).

Ora, suppongasi di avere una curva di genere $p > 1$ con due sistemi regolari di integrali riducibili aventi le dimensioni rispettive $p - q - 1$ e $q - 1$. Esisteranno su di essa corrispondenze algebriche di specie $p - q$ aventi per sistemi associati i sistemi dati?

Se alla considerazione della curva si sostituisce quella della matrice riemanniana (unica, dal punto di vista della relazione di equivalenza) collegata ad essa, e alla considerazione delle corrispondenze situate su di essa, si sostituisce quella delle omografie riemanniane della matrice che ne dànno le *imagini*, il teorema di Rosati apparisce come caso particolare del teorema di Scorza (2) affermante che un'omografia riemanniana singolare di una matrice di Riemann ha per assi due assi della matrice, e la questione posta più sopra si riduce a quest'altra, più generale:

(1) Rosati, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica.*. ecc. Annali di Matematica, serie III, tomo XXV, pp. 1-32, n. 3.

(2) Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann*, ecc. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLI (1916), pp. 1-118, n. 14.