ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

In corrispondenza si hanno per γ i valori $\gamma = \pm\sqrt{3}$; $\gamma = \pm i$.

Epperò la soluzione generale dell'equazione singolare scritto si otterrà con tali elementi.

Le condizioni per la convergenza sono:

$$\text{parte reale di } (-1-\gamma) < 0 \quad ; \quad \text{parte reale di } (+1-\gamma) > 0 .$$

Le radici $\gamma = \pm i$ soddisfano a tali condizioni, essendo nulla la parte reale; non vi soddisfano invece le altre due.

Resta quindi, come soluzione generale della equazione scritta unicamente una combinazione lineare di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$: e precisamente, tenuto conto delle relazioni fra i coefficienti, dedotte dall'equazione differenziale, resta il solo $\cos x$.

In altri lavori tratteremo delle equazioni integro-differenziali di tale tipo, e del caso che le ε non sieno radici dell'unità.

Matematica. — *Sulle omografie riemanniane di una matrice di Riemann.* Nota di Salvatore Cherubino, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Secondo un teorema recentemente stabilito dal Rosati, ad ogni corrispondenza algebrica *speciale*, situata sopra una curva di genere $p > 1$, sono *associati* due sistemi regolari di integrali abeliani riducibili (di 1ª specie). Se la *specie* della corrispondenza è $p-q$, questi due sistemi hanno le dimensioni rispettive $p-q-1$ e $q-1$ [1].

Ora, suppongasi di avere una curva di genere $p > 1$ con due sistemi regolari di integrali riducibili aventi le dimensioni rispettive $p-q-1$ e $q-1$. Esisteranno su di essa corrispondenze algebriche di specie $p-q$ aventi per sistemi associati i sistemi dati?

Se alla considerazione della curva si sostituisce quella della matrice riemanniana (unica, dal punto di vista della relazione di equivalenza) collegata ad essa, e alla considerazione delle corrispondenze situate su di essa, si sostituisce quella delle omografie riemanniane della matrice che ne dànno le *imagini*, il teorema di Rosati apparisce come caso particolare del teorema di Scorza [2] affermante che un'omografia riemanniana singolare di una matrice di Riemann ha per assi due assi della matrice, e la questione posta più sopra si riduce a quest'altra, più generale:

[1] Rosati, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica..* ecc. Annali di Matematica, serie III, tomo XXV, pp. 1-32, n. 3.

[2] Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann*, ecc. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLI (1916), pp. 1-118, n. 14.

Se una matrice di Riemann di genere $p > 1$ ammette due assi delle dimensioni rispettive $2(p-q)-1$ e $2q-1$ esisteranno per essa delle omografie riemanniane singolari aventi per primo e secondo asse i due assi dati?

La risposta è certo affermativa se i due assi sono indipendenti e cioè *complementari*, come è stato già osservato dal Rosati e dallo Scorza (¹); ma non è tale senz'altro se i due assi sono dipendenti.

Ebbene noi vogliamo appunto esaminare in questa Nota sotto quali condizioni la risposta è affermativa anche per assi dipendenti, e quindi, in sostanza, vogliamo caratterizzare le coppie di assi di una matrice di Riemann che possono essere riguardate come coppie di assi di sue omografie riemanniane singolari.

I risultati a cui perveniamo sono raggiunti molto semplicemente: ma non ci sembrano privi di interesse perchè ed essi e le considerazioni che li forniscono si collegano intimamente con la teoria generale delle matrici di Riemann (²).

1. Cominciamo dal dimostrare che:

Se due matrici riemanniane sono isomorfe e un asse della prima è isomorfo ad uno della seconda, i complementari del primo asse sono isomorfi ai complementari del secondo (³).

Siano, infatti, ω e ω' le due matrici isomorfe, A_1 ed A_2 due assi complementari di ω, A'_1 ed A'_2 due tali per ω' e supponiamo A_1 isomorfo ad A'_1.

Siano

$$(1) \qquad B_{1,1}, B_{1,2}, \dots, B_{1,n} \quad \text{e} \quad B_{2,1}, B_{2,2}, \dots, B_{2,m}$$

due gruppi fondamentali di assi puri di A_1 e A_2 rispettivamente. Il gruppo di tutti gli assi $B_{1,j}$ e $B_{2,h}$ sarà un gruppo fondamentale di assi puri di ω. Allo stesso modo, siano

$$(2) \qquad B'_{1,1}, B'_{1,2}, \dots, B'_{1,n'} \quad \text{e} \quad B'_{2,1}, B'_{2,2}, \dots, B'_{2,m'}$$

due gruppi fondamentali di assi puri di A'_1 e A'_2, per modo che tutti gli assi (2) costituiranno un gruppo fondamentale di assi puri di ω'.

Se due matrici sono isomorfe, gli assi di ciascun gruppo fondamentale dell'una si riflettono in assi ad essi rispettivamente isomorfi, di un gruppo fondamentale dell'altra; inoltre dati due gruppi fondamentali di assi puri di una stessa matrice, essi possono esser sempre ordinati in modo che gli

(¹) Rosati, loc. cit., n. 4; Scorza, loc. cit., n. 41 *d*).

(²) Mi sia qui consentito di ringraziare vivamente il prof. Scorza per i preziosi consigli e per gli aiuti prestatimi nella ricerca di cui è oggetto questa Nota.

(³) È già noto che i complementari di uno stesso asse di una matrice riemanniana sono tutti isomorfi tra di loro. Ved. Scorza, Mem. cit., n. 43.

assi dell'uno siano isomorfi a quelli corrispondenti dell'altro [1]: dunque per l'isomorfismo delle matrici ω e ω' deve essere $n+m=n'+m'$ e poi gli assi (1) e (2) debbono distribuirsi in $m+n$ coppie, ciascuna coppia contenendo due assi isomorfi e appartenenti l'uno alla serie (1), l'altro alla serie (2). Ma intanto, per l'isomorfismo di A_1 e A'_1 deve essere $n=n'$ e gli assi $B_{1,j}$ e $B'_{1,j}$ si debbono poter distribuire in n coppie di assi della specie ora detta, dunque dovrà essere pure $m=m'$ e poi gli assi $B_{2,h}$ e $B'_{2,h}$ dovranno potersi distribuire anch'essi in m coppie della solita specie.

Segue [2] che gli assi A_2 e A'_2 sono, come volevasi, isomorfi.

Nel teorema ora dimostrato è contenuto implicitamente quest'altro che, in certo senso, può ritenersi come l'inverso della proposizione sulle matrici riemanniane composte ultimamente invocata:

Se la matrice riemanniana composta $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{vmatrix}$ *è isomorfa alla matrice riemanniana composta* $\begin{vmatrix} \omega'_1 & 0 \\ 0 & \omega'_2 \end{vmatrix}$ *ed è* ω_1 *isomorfa ad* ω'_1, *è anche* ω_2 *isomorfa ad* ω'_2.

Benchè evidente, non è forse inutile rilevare pure che se ω ed ω' coincidono, la proposizione stabilita si enuncia:

Se due assi di una matrice riemanniana sono isomorfi, sono tali anche i loro complementari.

2. È bene qui subito osservare che: *la totalità degli assi di una matrice riemanniana fra loro isomorfi non è necessariamente formata da tutti e soli i complementari di uno stesso,* ossia che *esistono matrici riemanniane possedenti coppie di assi non complementari tali che l'uno sia isomorfo ai complementari dell'altro asse.*

Si consideri, ad es., una matrice riemanniana impura priva di assi isolati, i cui assi puri, che sono tutti isomorfi fra di loro [3], siano del genere p'. Il genere della matrice sarà un multiplo di p', poniamo rp', e due assi della matrice saranno isomorfi non appena avranno la stessa dimensione o, ciò che fa lo stesso, lo stesso genere [4]. Ma allora, come è evidentemente possibile, basta prendere due assi di questa matrice non indipendenti, l'uno del genere sp' (con s intero e minore di r) e l'altro del genere $(r-s)p'$, per avere due assi non complementari, ma tali che l'uno sia isomorfo ai complementari dell'altro.

3. Ciò posto, possiamo subito dimostrare che:

Se un'omografia riemanniana di una matrice di Riemann è singolare, ciascuno dei suoi due assi è isomorfo ai complementari dell'altro.

[1] Scorza, Mem. cit., n. 49.
[2] Scorza, Mem. cit., n. 27.
[3] Scorza, Mem. cit., n. 46.
[4] Scorza, Mem. cit., n. 50.

E infatti, sia Ω un'omografia riemanniana singolare, di specie $2(p-q)$, della matrice di Riemann ω di genere p, e siano $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ ed $S^{\star}_{2q-1}$ i suoi assi, 1° e 2° rispettivamente, i quali sono anche assi della matrice.

L'omografia Ω, degenere nello spazio ambiente, è invece non degenere, ma sempre razionale, fra gli $S_{2(p-q)}$ della stella avente per centro $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ ed i punti di $S^{\star}_{2q-1}$. Dunque Ω subordina fra un qualsiasi complementare di $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ ed $S^{\star}_{2q-1}$ una omografia *razionale non degenere* che muta i punti del primo spazio situati sull'imagine della matrice, nei punti del secondo situati sulla stessa imagine.

Cioè, i complementari di $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ sono isomorfi ad $S^{\star}_{2q-1}$; e allora, per quanto è stabilito nel n. 1, anche i complementari di $S^{\star}_{2q-1}$ sono isomorfi ad $S^{\star}_{2(p-q)-1}$.

Viceversa: *Se $S^{\star}_{2(p-q)-1}$, $S^{\star}_{2q-1}$ sono due assi di una matrice riemanniana ed è l'uno di essi isomorfo ai complementari dell'altro, detto h l'indice di moltiplicabilità di $S^{\star}_{2q-1}$, esistono $h+1$, ma non più, omografie riemanniane linearmente indipendenti della matrice, singolari di specie $2(p-q)$ aventi per primo asse $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ e per secondo asse $S^{\star}_{2q-1}$.*

Sia infatti S_{2q-1} un complementare di $S^{\star}_{2(p-q)-1}$. Poichè $S^{\star}_{2q-1}$ è isomorfo ad S_{2q-1}, l'indice di moltiplicabilità di S_{2q-1} è ancora h e il *carattere simultaneo* di $S^{\star}_{2q-1}$ ed S_{2q-1} è $h+1$ (¹); quindi esistono $h+1$, e non più, omografie razionali indipendenti e non degeneri che portano $S^{\star}_{2q-1}$ in S_{2q-1} e che mutano lo spazio $s^{\star}_{q-1}$ $(\bar{s}^{\star}_{q-1})$ di appoggio di $S^{\star}_{2q-1}$ con l'imagine τ $(\bar{\tau})$ della matrice, nello spazio s_{q-1} $(\bar{s}_{q-1})$ di appoggio di S_{2q-1} con l'imagine stessa.

Ognuna di queste $h+1$ omografie, moltiplicata a destra per la prospettività tra S_{2q-1} e la stella di vertice $S^{\star}_{2(p-q)-1}$, dà luogo ad una omografia, anch'essa razionale e non degenere, fra i punti di $S^{\star}_{2q-1}$ e gli $S_{2(p-q)}$ passanti per $S^{\star}_{2(p-q)-1}$, la quale, a sua volta, ne determina *una*, singolare di specie $2(p-q)$, di S_{2p-1} in se stesso ed avente per primo asse $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ e per secondo asse $S^{\star}_{2q-1}$. E quest'ultima essendo una omografia riemanniana per la data matrice, il teorema enunciato ne risulta dimostrato senz'altro.

4. Sia ora Ω una omografia di Riemann, degenere o non, della matrice riemanniana ω ed indichiamo con I l'omografia identica dello spazio rappresentativo, che è anch'essa riemanniana. Le omografie $\Phi \equiv \Omega + \lambda I$, *con λ razionale*, sono tutte omografie riemanniane della matrice ω. Se Ω ha qualche spazio di punti uniti razionale, questi spazii rispondono ad altrettante radici razionali distinte dell'equazione caratteristica $D(\varrho) = 0$ della Ω, e sono assi della matrice (²).

(¹) Scorza, Mem. cit., n. 16.

(²) Scorza, Mem. cit., n. 23

Ed allora, ponendo $-\lambda$ successivamente eguale a queste radici, si ottengono altrettante omografie riemanniane degeneri Φ le quali ammettono come assi precisamente i due spazii fondamentali coniugati corrispondenti a ciascuna di quelle radici, nella omografia Ω.

Dunque, per quanto è stato dimostrato al n. 3, si ha che:

In ogni omografia riemanniana, uno spazio di punti uniti che sia razionale ed il suo coniugato sono 2 assi della matrice l'uno isomorfo ai complementari dell'altro.

5. Supponiamo ora che la matrice riemanniana ω sia quella dei periodi normali di certi p integrali abeliani di 1ª specie indipendenti di una curva di genere $p > 1$, su $2p$ cicli lineari indipendenti.

Tenendo presente che per ogni asse della matrice riemanniana si ha un sistema *regolare* di integrali riducibili sulla curva, e che ogni omografia riemanniana di ω è imagine di una *classe* di corrispondenze algebriche situate sulla curva, le proposizioni stabilite si traducono immediatamente in altrettante sui sistemi regolari di integrali abeliani riducibili e sulle corrispondenze algebriche della curva stessa.

Enunciamo soltanto queste ultime:

1° *Ad ogni corrispondenza algebrica di specie $p-q$, sopra una curva algebrica di genere $p > 1$, sono associati due sistemi regolari di integrali riducibili di prima specie, uno ∞^{q-1}, l'altro ∞^{p-q-1}, ciascuno isomorfo ai complementari dell'altro: in particolare, i 2 sistemi predetti possono esser complementari.*

2° *Dati, sopra una curva algebrica di genere $p > 1$, due sistemi regolari di integrali riducibili l'uno isomorfo ai complementari dell'altro e detto h l'indice di moltiplicabilità di uno dei 2 sistemi, esistono $h+1$, e non più, corrispondenze algebriche linearmente indipendenti, speciali di specie eguale alla dimensione dell'altro sistema accresciuta di 1 ed aventi associati i sistemi stessi.*

Nelle quali proposizioni è contenuta quest'altra:

3° *Se sopra una curva algebrica di genere $p > 1$ esistono corrispondenze algebriche di specie $p-q$ aventi associati, ordinatamente, i sistemi regolari riducibili* A *e* B, *vi esistono anche corrispondenze di specie q aventi associati* B *ed* A.

4° *Ad ogni corrispondenza algebrica ad r valenze parziali* (¹) *(semplici o multiple) sopra una curva algebrica di genere $p > 1$, sono associate r coppie di sistemi regolari di integrali riducibili, i sistemi di ciascuna coppia essendo l'uno isomorfo ai complementari dell'altro.*

(¹) Per la definizione di valenza parziale di una corrispondenza, vedi Rosati, *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica*, Atti dell'Accademia di Torino, vol. 51 (1915-16).