ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Sulla riducibilità dell'equazione tangenziale di una superficie dotata di curva doppia.* Nota di OSCAR CHISINI, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

1. Se una superficie algebrica
$$f_c(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$$
possiede una curva doppia, C, l'equazione del suo inviluppo
$$F_c(u_1\, u_2\, u_3\, u_4) = 0$$
ottenuta eliminando le x_i e il fattore di proporzionalità, ϱ, fra le cinque equazioni
$$\text{(I)} \qquad f_c(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0 \;,\; \varrho u_i = \frac{\partial f_c(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$
svanisce identicamente, giacchè il sistema (I) riesce compatibile per qualunque quaterna di valori assegnati alle u_i (il che sta ad esprimere il fatto geometrico che ogni piano può essere considerato come tangente ad f_c, segandola f_c stessa secondo una curva dotata di punto doppio).

Tuttavia, se si considera la superficie f_c come limite di una superficie f, dello stesso ordine m, priva di singolarità, per es. limite entro un fascio $f_c + \lambda f_0 = 0$, l'inviluppo F_c risulterà il limite dell'inviluppo F relativo alla f: così concepito l'inviluppo F_c appare come un inviluppo ben determinato, e solo in apparenza evanescente, di guisa che, dividendo per un fattore numerico che diviene nullo, è possibile ottenere un'equazione non identica: il che sembra contraddire a quanto sopra abbiamo osservato. Ma, considerando più da vicino la cosa, si riconosce come l'inviluppo limite di F dipenda dal modo con cui, entro il sistema delle superficie d'ordine m, ci si avvicina alla f_c, sicchè i varî inviluppi limiti hanno solo una parte comune; così F_c risulta decomponibile in un *fattore determinato*, diverso da zero, e in un *fattore indeterminato essenzialmente nullo*, dal quale non si può più estrarre — per una conveniente divisione — alcun altro fattore determinato. Più precisamente: *data una superficie* $f_c(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$, *dotata di una curva doppia* C (che per semplicità supporremo esser priva di punti multipli e presentar solo punti cuspidali ordinari per f_c) *l'inviluppo* $F_c(u_1\, u_2\, u_3\, u_4) = 0$, ottenuto eliminando le x_i e ϱ fra le (I), *si decompone in quattro fattori*:

il primo fattore rappresenta l'inviluppo dei piani propriamente tangenti ad f_c;

il secondo fattore, che compare al quadrato, rappresenta i piani tangenti alla curva C;

il terzo fattore, che compare al cubo, rappresenta l'insieme delle stelle che hanno per vertici i punti cuspidali della curva doppia;

il quarto fattore, a cui è dovuto l'annullamento identico di F_c, *è il fattore indeterminato: esso rappresenta un insieme di stelle i cui centri appartengono alla* C, *ma sono del resto variabili dipendentemente dal modo di tendere al limite.*

Scopo della presente Nota è appunto quello di esaminare le circostanze in cui avviene lo svanimento identico, e la relativa riduzione in fattori, dell'inviluppo F_c; dalle quali circostanze seguono facilmente le note formule numeriche che danno la *classe della superficie* f_c *e il numero dei suoi punti cuspidali.*

2. Il problema della degenerazione dell'inviluppo di una superficie algebrica f, la quale acquisti una curva nodale C, è intimamente connesso al problema della degenerazione dell'inviluppo di una curva piana dalla quale si stacchi una parte (luogo) contata due volte; infatti i piani tangenti ad f passanti per un punto, O, dello spazio, inviluppano il cono che proietta il contorno apparente di f, relativo ad O: quando f acquista la curva nodale C, dal suddetto cono si stacca come parte doppia il cono O(C). Pertanto conviene esaminare a cosa si riduce *l'inviluppo di una curva piana* $k = 0$, d'ordine $2n + r$, quando essa viene a *spezzarsi* in una $c = 0$, d'ordine n, *contata due volte*, e in una parte residua, d'ordine r, $h = 0$ [1].

Supponiamo dapprima che la curva c non abbia singolarità e che incontri la curva h in nr punti distinti; allora se si considera la $c^2h = 0$ come limite di una curva k variabile in un fascio $c^2h - \lambda l = 0$, dove $l = 0$ è una curva generale d'ordine $2n + r$, *l'inviluppo limite di* k *si compone*:

α) *dell'inviluppo di* h;

β) *dell'inviluppo di* c, *contato due volte*;

γ) *dei* $(2n + r)n$ *fasci aventi come centri i punti base* P, *comuni alla* c *ed alla* l, *ciascuno contato una volta*;

δ) *degli* nr *fasci aventi come centri i punti* Q *comuni alla* c *ed alla* h, *ciascuno contato tre volte.*

Le prime due asserzioni seguono subito ove si consideri il limite delle tangenti alla curva variabile k condotte parallelamente all'asse y, i cui punti di contatto sono dati dalle intersezioni di

$$k(xy) = c^2(xy)\,h(xy) + \lambda l(xy) = 0$$

[1] La considerazione di una curva che si riduce ad una retta multipla, con certi punti di diramazione, conservando così un inviluppo determinato, s'incontra in Zeuthen, *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie*, § 29, dove tuttavia non si trova un'analisi del problema qui trattato.

con la polare

$$\frac{\partial k}{\partial y} = 2ch\,\frac{\partial c}{\partial y} + c^2\,\frac{\partial h}{\partial y} + \lambda\,\frac{\partial l}{\partial y} = 0\,.$$

Per riconoscere invece che una tangente (almeno) va a cadere in ciascuno dei $(2n+r)n$ punti P comuni a c e l, basta osservare che sopra una retta p, passante per P, le curve del fascio $c^2h + \lambda l = 0$ segano una g^1_{2n+r} che ha in P un punto fisso, il quale — per un noto teorema ([1]) — appare doppio oltre che per il gruppo $\lambda = 0$, anche per il gruppo infinitamente vicino. Segue che la retta p è limite di una tangente condotta alla k da uno qualunque dei suoi punti.

Resta ora da dimostrare che un punto Q, comune a c e h, è limite di tre intersezioni della curva $k(xy) = 0$ con la sua polare $\dfrac{\partial k}{\partial y} = 0$. A tale oggetto poniamo $\lambda = z$ e consideriamo le due superficie

$$\varphi = c^2(xy)\,h(xy) + z\,l(xy) = 0$$

$$\psi = 2c(xy)\,h(xy)\,\frac{\partial c(xy)}{\partial y} + c^2(xy)\,\frac{\partial h(xy)}{\partial y} + z\,\frac{\partial l(xy)}{\partial y} = 0:$$

queste hanno a comune oltre la curva piana c, una curva residua γ, passante per Q. Le intersezioni di k e della sua polare che — per $\lambda = 0$ — tendono a Q sono tante quante le intersezioni del piano $z = \lambda$ e della curva $c + \gamma$ che tendono al punto Q; ma le intersezioni di c col piano $z = \lambda$ restano fisse nei punti all'infinito di c, sicchè restano a considerarsi solo le intersezioni di γ. Ora la curva γ, appartenendo alla superficie φ passante semplicemente per Q e segata dal piano $z = 0$ secondo una curva dotata del punto triplo Q, ha tre intersezioni (almeno) riunite in Q col piano $z = 0$.

Si esclude poi che per un punto P venga a passare più di una tangente, e così pure più di tre per un punto Q, osservando che la classe di k vale:

$$(2n+r)(2n+r-1) = 2n(n-1) + r(r-1) + (2n+r)\,n + 3rn\,.$$

Ciò che si è detto si estende in generale, in qualunque modo varî la k, e qualunque siano le particolarizzazioni di c, h; basta osservare che se k tende a c^2h in una serie continua Σ, semplicemente infinita, l'inviluppo limite di k non varia sostituendo a Σ il fascio determinato dalla c^2h e dalla k infinitamente vicina; inoltre all'inviluppo di c e h vanno sommati i fasci corrispondenti ai loro punti multipli, e dall'inviluppo limite vanno tolti invece i fasci relativi ai punti singolari della curva k.

([1]) Cfr. Enriques-Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. I, libro 2°, § 5, pp. 179-180.

3. Veniamo ora all'esame dell'inviluppo, F_c, di una superficie f_c dotata di una curva doppia C (che supporremo essere priva di singolarità e presentare soltanto punti cuspidali ordinarî per la f_c); considereremo f_c come limite di una superficie f, dello stesso ordine m, del resto generale. Si fissi nello spazio un punto O: il contorno apparente di f, vista da O, sarà una curva K (segata su f dalla polare del punto O) d'ordine $m(m-1)$, la cui proiezione, fatta da O è una curva, k, dotata di

$$\tfrac{1}{2}\, m(m-1)(m-2)(m-3)$$

nodi e di

$$m(m-1)(m-2)$$

cuspidi, corrispondenti alle bitangenti e alle tangenti principali che escono da O [1]. Se n è l'ordine di C, il contorno apparente di f_c sarà composto della curva C, contata due volte, e di una curva residua, H, d'ordine $m(m-1)-2n$; sicchè, quando f tende a f_c, la curva k si riduce a una curva c, proiezione di C, contata due volte, più una curva h, proiezione di H. Pertanto, in base a ciò che si è veduto al n. 2, possiamo dire che *quando f tende a f_c, il suo inviluppo* F *si riduce al limite all'inviluppo proprio di f_c, più l'insieme dei piani tangenti a* C, *contato due volte, più un certo numero di stelle coi centri su* C: un esame più minuto occorre per riconoscere quali di queste stelle siano indipendenti dal modo con cui f tende a f_c, figurando così nel fattore determinato di F_c, e quale ne sia la relativa molteplicità.

A tale oggetto si faccia tendere f ad f_c entro un fascio $f_c + \lambda f_0 = 0$, $f_0 = 0$ essendo una generica superficie d'ordine m. Ora, se un punto A di C è centro di una delle stelle che fan parte dell'inviluppo limite di f, la sua proiezione A$'$, che — essendo O generico — possiamo supporre essere un punto semplice della c, dovrà cadere in un punto P comune a c e alla k (proiezione del contorno apparente della $f_c + d\lambda f_0 = 0$) infinitamente vicina alla c^2h, oppure dovrà coincidere con un punto Q, intersezione di c e h. Nella prima ipotesi si osserverà che la retta OA $=$ OP risulta tangente (impropriamente) alla f_c e alla superficie infinitamente vicina $f_c + d\lambda f_0 = 0$, sicchè la radice $\lambda = 0$ risulta doppia per l'equazione in λ che serve a determinare i gruppi dotati di punto doppio entro la g^1_m segata sulla OA dalle superficie del fascio. Poichè la f_c sega la retta OA secondo un gruppo di m punti di cui due soli coincidono in A, gli altri restando fra loro distinti, si deduce [2] che il punto A è un punto fisso per la g^1_m suddetta, appartenendo così alla superficie f_0.

[1] Formule di Salmon. Cfr. per es. Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, parte II, n. 67.

[2] Cfr. Enriques-Chisini, op. cit., ibidem.

Pertanto *le stelle* A, *appartenenti al fattore determinato di* F_c, hanno il centro in punti la cui proiezione A′ risulta un punto comune a c e h, e quindi — essendo O generico — un tale punto A è un punto comune a C e a tutte le ∞^3 curve H (segate su f_c dalle sue polari): segue che dette stelle *hanno il centro nei punti cuspidali di* C.

Per riconoscere poi che una stella A, col centro in un *punto cuspidale* di C, figura esattamente *tre volte nel fattore determinato* di F_c, basterà dimostrare che la proiezione di un tal punto è un punto $A' = Q$ comune a c e h, che non è limite di un punto doppio di k, e che in esso non cade alcun punto P base per il fascio determinato dalla c^2h e da una k a questa infinitamente vicina. La prima affermazione segue dal fatto che la retta OA non è bitangente nè tangente principale alla f_c; la seconda invece si deduce osservando che — in base al ragionamento svolto poco sopra — se in A′ cadesse un punto P, il punto A sarebbe un punto appartenente alla curva base di un fascio $f_c + \lambda f_0 = 0$ in cui si supponga variare la f.

E così l'enunciato del n. 1 è completamente stabilito, potendosi sempre considerare la f_c come limite di una superficie variabile in un fascio.

4. Ove si vogliano applicare le considerazioni precedenti alla *determinazione della classe e del numero dei punti cuspidali di una superficie* $f_c = 0$, *dotata di una curva doppia* C, occorre anzitutto riconoscere con precisione ove cadano i punti base comuni alla c^2h e alla k a questa infinitamente vicina. A tale scopo si supponga la f variabile entro il fascio $f_c + \lambda f_0 = 0$, e si consideri il fascio di curve determinato dalla k relativa a una f generica e da quella relativa alla f infinitamente vicina: questo fascio di curve ha $[m(m-1)]^2$ punti base dei quali

$$2\left[\tfrac{1}{2}\, m(m-1)(m-2)(m-3)\right]$$

cadono nei punti doppî di k, $3[m(m-1)(m-2)]$ nelle cuspidi di k, e infine $m^2(m-1)$ nei punti proiezione dei punti comuni al contorno apparente di f e alla curva base del fascio di superficie $f_c + \lambda f_0 = 0$.

Le affermazioni precedenti seguono dal fatto (la cui scoperta si può far risalire a De Jonquières) che due curve infinitamente vicine, dotate di nodi e cuspidi, hanno due intersezioni riunite in ogni nodo e tre in ogni cuspide [1], e dalla osservazione svolta innanzi che una tangente alla superficie f in un punto della linea base del fascio è tangente anche alla f infinitamente vicina.

Ciò posto sulla curva c si distingueranno quattro specie di punti particolari:

α) I punti A', proiezioni dei punti cuspidali della curva C: in A' la c e la h si tagliano senza oscularsi, e — come si è già osservato — non si ha sovrapposizione di alcun punto P.

[1] Cfr. per es. Enriques-Chisini, op. cit., vol. I, pag. 328.

β) I punti B', proiezioni dei punti B comuni alla curva C e alla curva H ulteriore intersezione di f_c con la polare di O (si escludono i punti A). La retta OB avendo in B un contatto tripunto con la superficie f_c, B è un punto comune a C e alla seconda polare di f, la quale ha ivi tre intersezioni con la curva $2C + H$, contorno apparente di f_c: pertanto i punti B' sono in numero di $n(m-2)$ e ciascuno di essi è limite di 3 cuspidi della curva variabile k; inoltre in B' la c e la h sono fra loro tangenti (essendo il piano per O tangente alla H in B propriamente tangente alla f_c). In un punto B' confluiscono due punti Q (ciascuno dei quali abbiamo visto assorbire tre fasci dell'inviluppo limite di una curva che tenda a c^2h); essendo B' limite di 3 cuspidi di k (e quindi al limite centro di 9 fasci, almeno) in esso devono cadere almeno 3 punti P. Si riconosce che cadono esattamente 3 punti P osservando che la c^2h ha proprio 9 intersezioni in B' con la k infinitamente vicina, e che questa non può avere 4 intersezioni con c senza averne 2 con h.

γ) I punti Γ', che sono i punti comuni a c e h diversi dagli A' e B': essi sono le traccie delle rette per O incidenti a C e tangenti (propriamente) altrove alla f_c. Così appare che un punto Γ' è limite di due punti doppî della k, e — tenuto conto che Γ' è un punto Q — si riconosce, come sopra, che in Γ' cade uno e uno solo dei punti P.

δ) I punti Δ', doppî per la c. Ed è chiaro come ciascuno di questi sia limite di 4 punti doppî della k e assorba 4 punti P.

Poichè nessun altro punto di c può esser limite di un nodo e di una cuspide della curva variabile k, gli altri punti P, diversi dai punti A', B', Γ', Δ', sono gli mn punti proiezione delle intersezioni di C con la f_0. Si deduce che i punti Γ' sono in numero di

$$x = nm(m-1) - nm - 3n(m-2) - 4d,$$

essendo d il numero dei punti doppî apparenti della curva C.

Conosciuto così il numero dei punti doppî della curva k che cadono sulla c $(2x + 4d)$ e quello $(3n(m-2))$ delle cuspidi, si valuta immediatamente la classe della curva residua h, cioè *la classe di* f_c, *che trovasi essere espressa dalla formula*

$$m(m-1)^2 - [n(7m - 4n - 8) + 8d];$$

similmente — in base ai numeri sopra determinati — si calcola il numero dei punti A', e quindi quello dei *punti cuspidali di* C, che è

$$y = n[m(m-1) - 2n] - 2n(m-2) - x = 2n(m-n-1) + 4d.$$