ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

riazioni di tal genere: e lo studio accurato dei risultati offrirà campo nella relazione definitiva di chiarire questo punto.

Per ora si può asserire ad ogni modo, che per opera della Marina italiana è stata compiuta, anche in mezzo al fragore delle armi, una delle operazioni più delicate della geodesia operativa, conseguendo risultati che non sono per nulla inferiori ai lavori più precisi fatti sia da noi che presso le altre nazioni del mondo.

Matematica. — *Un tipo semplice di reti di reciprocità degeneri di 1ª specie tra spazî ad* n *dimensioni.* Nota di EUGENIO G. TOGLIATTI, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

1. Una reciprocità tra un S_n ed un S'_n:

$$\Sigma\, a_{ij}\, x_i\, y_j = 0 \qquad (i\,,j = 0\,,1\,,\dots,n) \tag{1}$$

si dice *degenere di specie* $h+1$ (e la chiameremo una S_h-reciprocità) quando il determinante $|a_{ij}|$ è di *rango* $n-h$; essa possiede allora, in S_n ed S'_n rispettivamente, un S_h ed un S'_h di punti singolari. Se a_{ij} sono forme lineari di parametri $\lambda_0\,,\lambda_1\,,\dots$, e se $|a_{ij}|$ è di rango $n-h$ per valori generici di questi, la (1) rappresenta un *sistema lineare* di S_h-reciprocità, che diremo *di specie* $h+1$. Esso si dirà *completo* quando non esiste un sistema lineare della stessa specie e di dimensione maggiore che lo contenga.

Dei teoremi delle due Note citate riportiamo i seguenti:

Per un fascio di S_h-reciprocità tra S_n ed S'_n esistono in S_n ed S'_n due spazî S_m, $S'_{m'}$, tali che $S_m(S'_{m'})$ contiene tutti gli $S_h(S'_h)$ singolari ed ha, in tutte le reciprocità del fascio, lo stesso S'_{n-m+h} ($S_{n-m'+h}$) corrispondente passante per $S'_{m'}$ (per S_m). Ed i luoghi degli spazî singolari (supposti variabili sì in S_n che in S'_n) sono rispettivamente una U_{h+1}^{m-h} ed una $V_{h+1}^{m'-h}$ appartenenti ad S_m ed $S'_{m'}$.

Ad es. per $h=0$, si ottengono, come luoghi dei punti singolari, delle curve razionali normali; per $h=1$, i luoghi delle rette singolari sono delle rigate razionali normali; ecc.

I sistemi lineari completi di reciprocità degeneri tra due piani π, π' sono i seguenti: 1°) sistema ∞^2, di 2ª specie, delle reciprocità che hanno in π (o π') una data retta singolare; 2°) sistema ∞^5, di 1ª specie, delle reciprocità che hanno in π (o π') un dato punto singolare; 3°) sistema ∞^4, di 1ª specie, delle reciprocità in cui si corrispondono due rette, date rispettivamente in π, π'; 4°) rete delle S_0-reciprocità definite dalle

[1] Questa Nota si collega ad altre due, in corso di stampa negli Atti dell'Acc. di Torino, vol. 52 (1916-17): *Sui fasci di reciprocità degeneri tra spazî ad* n *dimensioni*; *Su alcune classi di sistemi lineari di reciprocità degeneri tra spazî ad* n *dimensioni.*

∞^2 *proiettività tra fasci di rette che son contenute in un'omografia non degenere tra* π *e* π'.

Per un sistema lineare di S_h-reciprocità ha importanza il tipo del fascio generico in esso contenuto; se m, m' sono gli spazî d'immersione delle varietà costituite, in S_n ed S'_n, dagli spazî singolari delle reciprocità di quel fascio, indicheremo il sistema col simbolo $(m, m')_h$. Ci occuperemo in questa Nota delle reti $(1, n-1)_0$, supponendo $n > 2$.

2. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tre reciprocità della rete (fra loro linearmente indipendenti), di punti singolari A_1, A'_1; A_2, A'_2; A_3, A'_3; che supporremo distinti e non allineati sì in S_n che in S'_n (¹). Alla retta $r_{ij} \equiv A_i A_j$ deve corrispondere, in α_i ed α_j, uno stesso iperpiano ϱ'_{ij}, che passa per A'_i ed A'_j; questi tre iperpiani, supposti in posizione generica, si segano a due a due in tre S'_{n-2}: $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$, omologhi del piano $\sigma \equiv A_1 A_2 A_3$ in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rispettivamente, ed hanno in comune un S'_{n-3}, π' (situato su $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$).

In S_n, il luogo dei punti singolari delle reciprocità della rete è il piano σ, che risulta anzi riferito omograficamente alle reciprocità della rete; perciò gli S'_{n-1} omologhi d'un punto generico P di σ nelle ∞^2 reciprocità della rete formano solo un fascio, di asse un S'_{n-2} passante per π'. Questo sta sugli S'_{n-1} omologhi, in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rispettivamente, delle rette PA_1, PA_2, PA_3, i quali, al variare di P in σ, descrivono, intorno a $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$, fasci proiettivi ai fasci di rette (di σ) di centri A_1, A_2, A_3; e due di queste proiettività individuano tra i punti di σ e gli S'_{n-1} per π' un'omografia ω che contiene anche la terza. Viceversa, se questo fatto si verifica, alle rette PA_i corrispondono, nelle tre proiettività anzidette, tre S'_{n-1} di un fascio, e perciò P è singolare per una reciprocità della rete $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. Dunque: *Affinchè tre* S_0*-reciprocità generiche* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *tra* S_n, S'_n, *di punti singolari* A_1, A'_1; A_2, A'_2; A_3, A'_3, *determinino una rete* $(1, n-1)_0$, *è necessario e sufficiente che i fasci di iperpiani omologhi, in* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *rispettivamente, dei tre fasci di rette* $A_1\sigma$, $A_2\sigma$, $A_3\sigma$ *(con* $\sigma \equiv A_1 A_2 A_3$*), corrispondano a quei fasci in tre proiettività contenute in una stessa omografia tra il piano* σ *ed una stella* ∞^2 *di iperpiani.*

3. Il luogo dei punti singolari in S'_n è una superficie razionale F', incontrata in un sol punto variabile dagli S'_{n-2} passanti per π', e che perciò

(¹) Non ci fermiamo su casi troppo particolari. Così, se A_1, A_2, A_3 sono allineati, tutte le reciprocità della rete fanno corrispondere alla retta $A_1 A_2 A_3$ uno stesso S'_{n-1} passante per A'_1, A'_2, A'_3; allora, per $n = 3$ il luogo dei punti singolari, in S'_3, delle S_0-reciprocità della rete è il piano omologo della retta $A_1 A_2 A_3$; mentre per $n > 3$ è la superficie (razionale), in generale di ordine $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, che si ottiene trasformando (con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) la stella degli S_{n-1} di S_n che passano per $A_1 A_2$ nelle stelle di rette di S'_{n-1} di centri A'_1, A'_2, A'_3, e considerando il luogo dei punti per cui passano tre piani omologhi di queste stelle: a uno di tali punti corrispondono infatti tre S_{n-1} di S_n formanti fascio, e viceversa.

si può proiettare biunivocamente da π' sul piano $A'_1 A'_2 A'_3$, ad es. Un S'_{n-1} generico per π' corrisponde in ω ad una retta di σ, quindi sega F' in una C'^{n-1} (luogo dei punti singolari, in S'_n, delle reciprocità di un fascio contenuto nella rete), ed in una curva fissa c', giacente in π', che ora determineremo (¹).

Osserviamo perciò che gli ∞^{n-3} iperpiani di S_n passanti per σ sono mutati da $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nelle rette delle stelle di centri A'_1, A'_2, A'_3 e sostegni rispettivamente $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$, le quali segano su π' tre S'_{n-3} omografici sovrapposti; se esiste in π' un punto A' (di F') singolare per una reciprocità della rete, i suoi tre S_{n-1} omologhi in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ formano fascio intorno ad un S_{n-2} passante per σ, al quale corrispondono in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tre piani per A'_1, A'_2, A'_3, seganti π' in rette (omologhe nelle omografie anzidette e) passanti per A'; e viceversa. Dunque c' è luogo dei punti per cui passano tre rette omologhe di tre S'_{n-3} omografici sovrapposti. Per determinarne l'ordine, scriviamo le equazioni di tre S'_{n-4} corrispondenti dei tre spazî omografici:

$$(2) \qquad \Sigma u'_i y_i = 0 \ , \ \Sigma u''_i y_i = 0 \ , \ \Sigma u'''_i y_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots, n-3);$$

si rappresenterà l'omografia dando u'_i, u''_i, u'''_i come forme lineari di $n-2$ parametri $t_0, t_1, \dots, t_{n-3}$, per modo che le (2) divengono lineari nei parametri, coi coefficienti forme lineari delle y_i. Sostituendo alle y_i le coordinate di un punto di c', per il quale passino le rette omologhe r', r'', r''', le equazioni stesse devono essere verificate da $n-4$ sistemi di valori delle t_i fra loro linearmente indipendenti (perchè per r' passano ∞^{n-5} iperpiani i cui omologhi passano essi pure per il punto y_i); e viceversa. Dunque le y_i annullano tutti i determinanti di 3° ordine della matrice (di 3 linee ed $n-2$ colonne) dei coefficienti di $t_0, t_1, \dots, t_{n-3}$; ossia c' è, in generale, di ordine $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ (²); ed F' quindi di ordine

$$(n-1) + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) = \tfrac{1}{2} n(n-3) + 2 \ (^3).$$

(¹) Nel ragionamento che segue si supponga $n > 4$. Per $n = 3$, lo spazio π' si riduce ad un punto, che sta su F', perchè ha per omologo il piano σ in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (anzi, esso sarà singolare per ∞^1 reciprocità della rete, formanti un fascio, contenente due S_1-reciprocità). Per $n = 4$, π' è una retta che sta su F', perchè ad ogni suo punto corrispondono in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tre S_3 passanti per σ, quindi formanti fascio.

(²) Segre, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rend. Lincei, (5) 9_2 (1900), pp. 253-260, n. 3. Si veda pure: Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, § 112; Lorenzola, *Sul luogo di un punto base comune a $k+1$ sistemi lineari di forme di dimensione $h+1$ corrispondenti in altrettanti sistemi lineari omografici di specie $k+h+1$*, Rend. Ist. Lomb., (2) 36 (1903), pp. 162-176.

(³) Da qui in poi si includano di nuovo i valori 3, 4 di n, per i quali c' diviene rispettivamente un punto od una retta.

La curva C'^{n-1} luogo dei punti singolari, in S'_n, delle reciprocità del fascio $\alpha_1 \alpha_2$ (che è generico entro la rete) si appoggia a c' in $n-2$ punti, perchè gli spazî σ'_1, σ'_2 si corrispondono nella proiettività fra le stelle A'_1, A'_2 che genera C'^{n-1}; perciò proiettando F' da π' su un piano generico, le ∞^2 C'^{n-1} di F' date dagli ∞^2 fasci della rete (le quali formano su F' una rete omaloidica), si proiettano nelle rette del piano, e le sezioni iperpiane di F' in curve di ordine $n-1$, incontrantisi a due a due in $\frac{1}{2}n(n-3)+2$ punti variabili. La curva c', che forma una sezione iperpiana di F' insieme con una qualunque di quelle C'^{n-1}, ha per immagine una curva di ordine $n-2$, γ, segante le immagini delle sezioni iperpiane in $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ punti variabili ed in $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ punti fissi. Sono questi ultimi i punti base del sistema lineare L rappresentativo di F'; ognuno di essi è immagine d'una retta di F', parte di (∞^1) C'^{n-1} della rete omaloidica, perciò singolare per una S_1-reciprocità contenuta nella rete (la cui retta singolare in S_n è incidente al piano σ).

Gli $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ punti base del sistema L possono, in casi speciali (dipendenti da particolarità della curva c'), non essere distinti; possono anche 3 o più di essi venir sostituiti da un punto base multiplo di L, ed allora l'ordine di F' si abbassa; però F' è sempre normale, se no la curva c' farebbe parte d'un sistema infinito di curve, ognuna delle quali starebbe in un iperpiano con ciascuna delle ∞^2 C'^{n-1} della rete omaloidica.

4. Viceversa, si prendano in un piano dei punti $P_1, P_2, \ldots, P_j$ (distinti o no), e si assegnino per ciascuno delle multiplicità $s_1, s_2, \ldots, s_j$, in modo che sia:

$$\Sigma \tfrac{1}{2} s_i(s_i+1) = \tfrac{1}{2}(n-2)(n+1),$$

e che esista *una* curva di ordine $n-2$, γ, passante per essi con le date multiplicità. Il gruppo base considerato rappresenterà $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ condizioni lineari indipendenti anche per curve di ordine $> n-2$; quindi definirà un sistema lineare (*regolare*) di curve di ordine $n-1$, di dimensione: $\frac{1}{2}(n-1)(n+2) - \frac{1}{2}(n-2)(n+1) = n$, e di grado: $(n-1)^2 - \Sigma s_i^2$; immagine di una superficie razionale normale F' di un S'_n. Su questa esiste una curva di ordine $(n-1)(n-2) - \Sigma s_i^2$, di immagine γ, appartenente ad un S'_{n-3}, π', e gli iperpiani per π' segano su F' ∞^2 C'^{n-1} d'una rete omaloidica, ognuna delle quali ha $n-2$ punti su π'. Costruiremo tra S'_n ed un S_n una rete di S_0-reciprocità i cui punti singolari in S'_n abbiano per luogo F'.

Perciò consideriamo le ∞^{3n-1} quadriche di S'_n passanti per π'; quelle di esse che contengono due C'^{n-1} generiche della rete omaloidica esistente su F' ed un punto generico ulteriore di F' sono sottoposte a $2n+2$ condizioni lineari indipendenti, per modo che le quadriche contenenti π' ed F' sono *al più* ∞^{n-3}. D'altra parte, le quadriche per π' segano su F', fuori

di c', un sistema lineare la cui immagine sul piano sta nel sistema ∞^{2n+1} di C^n definito dal gruppo dei punti P_i; perciò le quadriche contenenti π' ed F' sono *almeno* ∞^{n-3}. Si conclude che F' sta su $n-2$ quadriche, linearmente indipendenti, che passano per π'.

Assunto π' come spazio fondamentale $y_0 = y_1 = y_2 = 0$, le coordinate dei punti di F' verificheranno perciò le equazioni:

$$y_0 L_r + y_1 M_r + y_2 N_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, n-2),$$

ove:

$$L_r \equiv \Sigma L_{ri} y_i \ , \ M_r \equiv \Sigma M_{ri} y_i \ , \ N_r \equiv \Sigma N_{ri} y_i \qquad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Ora, tali equazioni provengono dall'eliminazione di $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tra le seguenti:

$$\lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2 = 0 \ , \ \lambda_0 y_2 - \lambda_2 y_0 = 0 \ , \ \lambda_1 y_0 - \lambda_0 y_1 = 0 \ ,$$
$$\lambda_0 L_r + \lambda_1 M_r + \lambda_2 N_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, n-2).$$

E ciò prova che F' è luogo dei punti singolari, in S'_n, per le reciprocità della rete il cui determinante è:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & . & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & \lambda_0 & 0 & . & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_0 & 0 & 0 & . & 0 \\ \lambda_0 L_{10} + \lambda_1 M_{10} + \lambda_2 N_{10} & . & . & . & . & \lambda_0 L_{1n} + \lambda_1 M_{1n} + \lambda_2 N_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda_0 L_{n-2,0} + \lambda_1 M_{n-2,0} + \lambda_2 N_{n-2,0} & . & . & . & . & \lambda_0 L_{n-2,n} + \lambda_1 M_{n-2,n} + \lambda_2 N_{n-2,n} \end{vmatrix}$$

Concludendo: *Il luogo dei punti singolari di una rete generale* $(1, n-1)_0$ *è in* S_n *un piano* σ, *ed in* S'_n *una superficie razionale normale* F' *di ordine* $\frac{1}{2} n(n-3) + 2$, *rappresentata sul piano dal sistema lineare di tutte le curve d'ordine* $n-1$ *che passano per* $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ *punti generici. La rete contiene* $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ S_1*-reciprocità, le cui rette singolari in* S'_n *stanno su* F' *ed in* S_n *sono incidenti a* σ.

Ad es., in S_3, come superficie F' si ottiene una quadrica; in S_4 una F^4 intersezione di due quadriche, oppure una rigata cubica normale; ecc.

Astrofisica. — *Il Sole emette radiazioni di altissima frequenza.* Nota di Mentore Maggini, presentata dal Corrispondente A. Garbasso.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.