ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1917.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie della classe* $K = -\frac{1}{\{\varphi(\alpha)+\psi(\beta)\}^2}$. Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Le superficie a curvature opposte per le quali la curvatura totale K, espressa pei parametri α, β delle linee asintotiche, assume la forma

$$\text{A)} \qquad K = -\frac{1}{\{\varphi(\alpha)+\psi(\beta)\}^2}$$

si presentano, come è noto, in diverse questioni di geometria [1]. Ciascuna superficie S di questa classe appartiene, come prima falda focale, ad una doppia infinità congruenze rettilinee W, la cui seconda falda S' ha in ogni punto la stessa curvatura come la S nel punto corrispondente, ed appartiene alla medesima classe A). Ne scaturiscono per le superficie della classe A) dei *metodi di trasformazione*, che si riducono a quelli delle superficie pseudosferiche quando in particolare $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\beta)$ si riducono a costanti. Mi propongo di mostrare in questa Nota che l'esistenza di queste trasformazioni basta già a caratterizzare le superficie della classe A). Per questo partiamo da un problema di *ordinamento di faccette piane*, al quale arriviamo nel modo seguente.

[1] Cfr. la mia Memoria del 1890: *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali* (Annali di matematica, ser. 2ª, tomo XVIII). Ved. anche il volume 2° delle mie *Lezioni di geometria differenziale*, §§ 249-252.

Data una superficie S, descriviamo attorno ad ogni suo punto P come centro, e nel relativo piano tangente π, un circolo C di raggio R variabile con P. Facciamo poi corrispondere a ciascuna faccetta $f \equiv (\pi, P)$ di S, costituita da un piano π tangente di S e dal suo punto P di contatto, una semplice infinità di faccette $f' \equiv (\pi', P')$ trasformate, i cui centri P' siano allogati sulla circonferenza C e i cui piani π' passino pel centro P di f, e siano inclinati sul suo piano π di un medesimo angolo σ (che sarà variabile in generale col punto P di contatto).

Domandiamo allora: *Come deve assumersi la superficie* S, *e quale deve essere la legge di variabilità pel raggio* R *e per l'angolo* σ, *affinchè le* ∞^3 *faccette trasformate* f' *si distribuiscano in* ∞^1 *superficie* S' (*trasformate di* S)?

Si vedrà che il problema così enunciato ammette soluzioni allora ed allora soltanto che la S sia a curvature opposte ed appartenga alla classe A), e in tal caso, fissata S, ammette ∞^1 soluzioni, restando una costante arbitraria nelle equazioni di R e σ. Ogni volta poi le superficie trasformate S' sono ancora della classe A), e coincidono appunto con quelle a cui conducono gli indicati metodi di trasformazione.

2. Riferiamo la superficie data S ad un sistema coordinato curvilineo (u, v), che supporremo per semplicità *ortogonale* ma del resto qualunque, e si abbia nelle usuali notazioni (ved. *Lezioni* ecc., vol. II, § 254):

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\, X_1\,, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}} X_3\,,\\
&\quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1 + \frac{D'}{\sqrt{G}} X_3\,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{D'}{\sqrt{G}} X_2\\
&\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\, X_2\,, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2 + \frac{D'}{\sqrt{E}} X_3\,,\\
&\quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} X_3\,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{D'}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}} X_2\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Scriviamo inoltre le relative equazioni di Codazzi

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\frac{D'}{\sqrt{G}} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\frac{D''}{\sqrt{G}}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\frac{D'}{\sqrt{E}}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

e l'equazione di Gauss

$$
(3)\quad \frac{DD'' - D'^2}{EG} = K\,,
$$

dove K indica la curvatura totale di Gauss:

$$(3^*)\qquad K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}.$$

Ora, attorno ad ogni punto $P \equiv (u, v)$ di S come centro e nel piano tangente π, descriviamo un cerchio di raggio R, dove R è da pensarsi come una funzione *data* di u, v, sia $R = R(u, v)$. Le coordinate x', y', z' di ogni punto P′ del detto circolo saranno date dalla formola

$$(4)\qquad x' = x + R(\cos\theta X_1 + \operatorname{sen}\theta X_2),$$

colle due analoghe per y', z', significando θ l'angolo d'inclinazione del raggio PP′ sulla direzione (X', Y', Z'). Le (4) ci dànno le coordinate del centro P′ di una faccetta f', e poichè il piano π' di questa passa per PP′, ed è inclinato di un certo angolo $\sigma = \sigma(u, v)$ sul piano π, i coseni di direzione X', Y', Z' della normale a π' potranno assumersi dati dalla formola

$$(5)\qquad X' = \operatorname{sen}\sigma(\operatorname{sen}\theta X_1 - \cos\theta X_2) + \cos\sigma X_3,$$

colle altre due analoghe.

Per risolvere il nostro problema conviene che nelle (4), (5) si pensino R e σ come funzioni *date* di u, v e si cerchi se è possibile scegliere per θ una conveniente funzione di u, v e *di una costante arbitraria* c:

$$\theta = \theta(u, v, e),$$

per modo che si verifichino le due equazioni

$$(6)\qquad SX'\frac{\partial x'}{\partial u} = 0 \quad , \quad SX'\frac{\partial x'}{\partial v} = 0.$$

Queste esprimono infatti che le ∞^3 faccette f' si ordinano in ∞^1 superficie S′, date dalle (4), quando vi si ponga $\theta = \theta(u, v, c)$.

3. Se deriviamo le (4), osservando le (1), abbiamo:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial u} &= \left\{\sqrt{E} + \frac{\partial R}{\partial u}\cos\theta - R\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}X_1 + \\
&\quad + \left\{\frac{\partial R}{\partial v}\operatorname{sen}\theta + R\cos\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}X_2 + \\
&\quad + R\left\{\cos\theta\frac{D}{\sqrt{E}} + \operatorname{sen}\theta\frac{D'}{\sqrt{G}}\right\}X_3, \\
\frac{\partial x'}{\partial v} &= \left\{\frac{\partial R}{\partial v}\cos\theta - R\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\right\}X_1 + \\
&\quad + \left\{\sqrt{G} + \frac{\partial R}{\partial v}\operatorname{sen}\theta + R\cos\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\right\}X_2 + \\
&\quad + R\left\{\cos\theta\frac{D'}{\sqrt{E}} + \operatorname{sen}\theta\frac{D''}{\sqrt{G}}\right\}X_3.
\end{aligned}\right.$$

Con queste formiamo le (6), ponendo inoltre

$$(7)\qquad \varDelta = \cot\sigma\,,$$

e troveremo per la funzione incognita θ il sistema dfferenziale seguente:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \varDelta\left(\dfrac{D}{\sqrt{E}}\cos\theta + \dfrac{D'}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\theta\right) + \dfrac{\sqrt{E}}{R}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \varDelta\left(\dfrac{D'}{\sqrt{E}}\cos\theta + \dfrac{D''}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\theta\right) - \dfrac{\sqrt{G}}{R}\cos\theta - \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,; \end{cases}$$

questo dovrà riuscire, nelle nostre ipotesi, completamente integrabile.

Ora, se scriviamo dapprima le (I) sotto la forma generica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta + C \\[2ex] \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = A'\cos\theta + B'\operatorname{sen}\theta + C', \end{cases}$$

le condizioni d'illimitata integrabilità sono le tre:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial v} - \dfrac{\partial A'}{\partial u} + BC' - CB' = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial B}{\partial v} - \dfrac{\partial B'}{\partial u} + CA' - AC' = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial C}{\partial v} - \dfrac{\partial C'}{\partial u} + BA' - AB' = 0\,. \end{cases}$$

Per le equazioni (I) i valori di $A, B, C\,;\ A', B', C'$ sono

$$\begin{cases} A = \varDelta\dfrac{D}{\sqrt{E}}\,,\ B = \varDelta\dfrac{D'}{\sqrt{G}} + \dfrac{\sqrt{E}}{R}\,,\ C = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \\[2ex] A' = \varDelta\dfrac{D'}{\sqrt{G}} - \dfrac{\sqrt{G}}{R}\,,\ B' = \varDelta\dfrac{D''}{\sqrt{G}}\,,\ C' = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,, \end{cases}$$

e sostituendo nelle prime due (8), coll'osservare le formole (2) di Codazzi, otteniamo le due seguenti:

$$(9)\qquad \begin{cases} D\dfrac{\partial\varDelta}{\partial v} - D'\dfrac{\partial\varDelta}{\partial u} + \sqrt{EG}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{R}\right) = 0 \\[2ex] D'\dfrac{\partial\varDelta}{\partial v} - D''\dfrac{\partial\varDelta}{\partial u} + \sqrt{EG}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{R}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Calcolando in fine la (8_3), con riguardo alle (3), (3*), otteniamo

$$K(A^2+1)=-\frac{1}{R^2},$$

cioè per la (7)

$$K=-\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{R^2}. \tag{10}$$

Quest'ultima formola dimostra intanto che:

Le soluzioni reali del problema sono da cercarsi soltanto fra le superficie a curvature opposte (asintotiche reali).

4. Proseguiamo nell'analisi del problema supponendo soddisfatte le condizioni d'integrabilità (9), (10), nel qual caso il sistema (I) ammette una soluzione $\theta(u, v, c)$ con una costante arbitraria, onde esistono ∞^1 superficie S' trasformate della S. Ciascuna di queste S', insieme colla S, forma, pei dati stessi del problema, la superficie focale della congruenza rettilinea costituita dalle congiungenti PP' i punti corrispondenti di S, S', e invero la PP' è anche l'intersezione dei due piani tangenti π; π'.

Ora dimostriamo che sopra S, S' si corrispondono le asintotiche, che cioè la congruenza è W. Per questo basterà provare (*Lezioni*, vol. II, § 243) che la falda focale S ammette una flessione infinitesima nella quale ciascun suo punto P si sposta nella direzione (X', Y', Z') della normale nel punto corrispondente P' all'altra falda S'.

Se con $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ indichiamo le componenti dello spostamento (infinitesimo) cercato, potremo porre per le (5), indicando T un fattore di proporzionalità

$$\overline{x}=T(\operatorname{sen}\theta X_1-\cos\theta X_2+AX_3), \tag{11}$$

colle analoghe $\overline{y}, \overline{z}$. Si tratterà di determinare T in guisa da soddisfare alle tre equazioni

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}=0\,,\quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}=0\,,\quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}+S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}=0.$$

Sostituendo in queste i valori (11), e tenendo conto delle formole precedenti, si trova che le condizioni per T si riducono alle due seguenti:

$$\tag{12}\left\{\begin{aligned}\frac{\partial \log T}{\partial u}&=A\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\theta-\frac{D'}{\sqrt{G}}\cos\theta\right)-\frac{\sqrt{E}}{R}\cos\theta\\ \frac{\partial \log T}{\partial v}&=A\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\theta-\frac{D''}{\sqrt{G}}\cos\theta\right)-\frac{\sqrt{G}}{R}\operatorname{sen}\theta.\end{aligned}\right.$$

Basta dunque provare che la condizione d'integrabilità per le (12) è identicamente soddisfatta. A questo arriviamo nel modo più semplice ricordando che il sistema (I) ammette una soluzione $\theta=\theta(u,v,c)$ con una costante arbitraria c. Se deriviamo le (I) *rapporto al parametro* c, che entra soltanto in θ e poniamo

$$\frac{\partial\theta}{\partial c}=\psi\,,$$

ne deduciamo subito

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\log\psi}{\partial u}&=-\varDelta\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\theta-\frac{D'}{\sqrt{G}}\cos\theta\right)+\frac{\sqrt{E}}{R}\cos\theta\\ \frac{\partial\log\psi}{\partial v}&=-\varDelta\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\theta-\frac{D''}{\sqrt{G}}\cos\theta\right)+\frac{\sqrt{G}}{R}\operatorname{sen}\theta\,.\end{aligned}\right.$$

Confrontando colle (12). vediamo che in effetto queste si soddisfano ponendo, a meno di un fattore costante di proporzionalità

$$T=\frac{1}{\dfrac{\partial\theta}{\partial c}}\,.$$

5. Abbiamo così dimostrato che: *la congruenza formata dalle congiungenti i punti corrispondenti di* S, S′ *è una congruenza* W, *che ha* S, S′ *come falde focali.*

Ed ora potremo subito completare il risultato dimostrando che: *le curvature* K, K′ *di* S, S′ *in punti corrispondenti sono eguali.*

E infatti, siccome R rappresenta la distanza focale e σ l'angolo dei piani focali, la formola di Ribaucour per le congruenze W (*Lezioni*, vol. II, § 243) ci dà

$$KK'=\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{R}\right)^4:$$

dunque per la (10) sarà

$$K'=K=-\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{R^2}\,.$$

A questo punto possiamo invocare i teoremi noti sulle congruenze W, a falde focali di eguale curvatura, e dedurne che la curvatura di S, espressa pei parametri α,β delle asintotiche, avrà necessariamente la forma A)

$$K=-\frac{1}{\{\varphi(\alpha)+\psi(\beta)\}^2}\,.$$

Viceversa per ogni superficie S di questa classe il problema proposto è risolubile, ed anzi in ∞^1 modi poichè sappiamo che, una volta fissata S nella classe A), resta ancora nelle espressioni del raggio R e dell'angolo σ *una* costante arbitraria.

Dopo ciò si vede che le formole (9), (10) rappresentano, in coordinate ortogonali qualunque, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una superficie S appartenga alla classe A). Si avverta poi che, mentre la condizione (10) dipende solo dall'elemento lineare di S, le altre due (9) contengono invece elementi variabili per flessione. In generale dunque una superficie S della classe A) perde, se si flette, questa sua proprietà, salvo nel caso ben noto delle superficie pseudosferiche, ove $\mathit{\Delta}$ ed R sono costanti e le (9) si risolvono in identità.

6. Nel numero precedente abbiamo invocato le proprietà note delle congruenze W a falde focali di eguale curvatura per completare la risoluzione del nostro problema. Ma possiamo anche, senza ricorrere a queste, proseguire coll'esame diretto delle condizioni (9), (10), e dedurne anzi, in nuovo modo, gli antichi risultati. Per questo conviene prima di tutto trasformare le (9) *in coordinate curvilinee qualunque* (u, v), che diano al ds^2 la forma generale

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}dv^2.$$

Semplici considerazioni invariantive dimostrano che le (9) si scrivono nel modo più generale sotto la forma:

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right) &= \frac{\mathrm{D}'\dfrac{\partial \mathit{\Delta}}{\partial u} - \mathrm{D}\dfrac{\partial \mathit{\Delta}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right) &= \frac{\mathrm{D}''\dfrac{\partial \mathit{\Delta}}{\partial u} - \mathrm{D}'\dfrac{\partial \mathit{\Delta}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}, \end{aligned}\right.$$

mentre la (13), posto $\mathrm{K} = -\dfrac{1}{\varrho^2}$, si scrive sempre

$$\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\varrho}, \quad \text{o} \quad \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\varrho \operatorname{sen}\sigma},$$

e si ha $\mathit{\Delta} = \cot\sigma$.

Ora se a linee coordinate prendiamo le asintotiche (α, β), avremo

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}'' = 0, \quad \frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} = \frac{1}{\varrho},$$

onde le (13) diventano

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} &= \cot\frac{1}{2}\sigma \cdot \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial\sigma}{\partial\beta} &= -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma \cdot \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial\beta}. \end{aligned}\right.$$

Qui la condizione d'integrabilità è semplicemente $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0$, da cui

$$\varrho = \varphi(\alpha) + \psi(\beta)\,, \quad \text{o} \quad K = -\frac{1}{\{\varphi(\alpha)+\psi(\beta)\}^2}\,.$$

Viceversa se ϱ ha questa forma, le (14) sono completamente integrabili, e però nella espressione di σ, indi di R, entra una costante arbitraria.

Così abbiamo provato direttamente che per ogni superficie S della classe A), e per queste soltanto, il problema proposto al n. 1 ammette soluzioni, anzi ne ammette ∞^1.

7. Dimostriamo da ultimo come questi risultati, ottenuti nell'ipotesi dello spazio euclideo, si estendono facilmente alla geometria non euclidea, dove il problema consente una risoluzione del tutto analoga. Eseguiamo qui i calcoli pel caso dello spazio ellittico, la cui curvatura K_0 si assumerà semplicemente $= 1$, e basterà poi indicare le leggiere variazioni da introdursi nelle formole se lo spazio è invece iperbolico.

Qui per utilizzare subito le formole date in altra mia Memoria (¹) riferiremo la superficie data S alle sue linee di curvatura $(u\,,v)$, e indicheremo con $r_1\,,r_2$ i raggi principali (ridotti) di curvatura, legati ai coefficienti E, G del $ds^2 = E du^2 + G dv^2$ dalle equazioni di Codazzi

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right) = \frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right) = \frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,,$$

e dalla relazione di Gauss:

$$(16) \qquad \frac{1}{r_1 r_2} + 1 = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}.$$

Indicando, come al n. 1, con $R = R(u\,,v)$ il raggio del circolo, con $\sigma = \sigma(u\,,v)$ l'angolo d'inclinazione del piano delle faccette f' sul piano della corrispondente faccetta $f \equiv (u\,,v)$, ed avendo ancora θ il significato del n. 2, dai calcoli eseguiti al § 1 della Memoria ora citata dedurremo per l'incognita θ il sistema differenziale:

$$(17) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} &= \sqrt{E}\cot R\,.\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{\sqrt{E}}{r_2}\cot\sigma\,.\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} &= -\sqrt{G}\cot R\,.\cos\theta - \frac{\sqrt{G}}{r_1}\cot\sigma\,.\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,. \end{aligned}\right.$$

(¹) *Sopra alcune classi di congruenze rettilinee negli spazii di curvatura costante* (Annali di matematica, tomo X della serie 3ª, 1904).

Per esprimere le condizioni d'illimilata integrabilità dovremo qui porre, nelle notazioni del n. 3:

$$\begin{cases} A = -\dfrac{\sqrt{E}}{r_2}\cot\sigma\,, & B = \sqrt{E}\cot R\,, & C = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \\ A' = -\sqrt{G}\cot R\,, & B' = -\dfrac{\sqrt{G}}{r_2}\cot\sigma\,, & C' = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \end{cases}$$

e sostituire questi valori nelle (8). Le due prime ci dànno, a causa delle (15):

$$(18)\qquad \begin{cases} \sqrt{G}\,\dfrac{\partial \cot R}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{r_2}\,\dfrac{\partial\cot\sigma}{\partial v} \\ \sqrt{E}\,\dfrac{\partial \cot R}{\partial v} = -\dfrac{\sqrt{G}}{r_1}\,\dfrac{\partial\cot\sigma}{\partial u}\,, \end{cases}$$

mentre la terza (8) diventa per la (16)

$$(19)\qquad \frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{\operatorname{sen}^2 R}\,.$$

Questa ultima dice intanto che la curvatura *relativa*

$$k_0 = \frac{1}{r_1 r_2}$$

dalla superficie S deve essere negativa (asintotiche reali).

8. Supposte soddisfatte le condizioni (18), (19), *necessarie e sufficienti* per la solubilità del problema, avremo che le ∞^3 faccette derivate f' si distribuiranno in ∞^1 superficie trasformate S′, e ciascuna di queste formerà colla S, come al n. 5, le due falde della congruenza costituita dalle congiungenti PP′ i punti corrispondenti. Dimostriamo anche qui che: *sopra* S, S′ *si corrispondono le asintotiche* (*congruenza* W).

Per questo basterà provare che i coefficienti D, D′, D″ della seconda forma fondamentale della S′ sono proporzionali ai corrispondenti della S, che sussistono cioè le relazioni

$$(20)\qquad D' = 0 \qquad \frac{G}{r_1}\,D - \frac{E}{r_2}\,D'' = 0\,.$$

In effetto, dai calcoli eseguiti al § 1 della detta Memoria, abbiamo in generale le formole:

$$
\left\{
\begin{aligned}
D &= \sqrt{E}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}R}\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial R}{\partial u}+\sqrt{E}\cos\theta\right)+ \\
&\qquad\qquad +\frac{\sqrt{E}}{r_2}\,\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}\sigma}\cos\theta\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\theta\right) \\
D' &= -\sqrt{G}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}R}\cos\theta\left(\frac{\partial R}{\partial u}+\sqrt{E}\operatorname{sen}\theta\right)+ \\
&\qquad\qquad +\frac{\sqrt{E}}{r_2}\,\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}\sigma}\cos\theta\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{r_2}\cos\theta\right) \\
D' &= \sqrt{E}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}R}\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial R}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\theta\right)+ \\
&\qquad\qquad +\frac{\sqrt{G}}{r_1}\,\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\theta\right) \\
D'' &= -\sqrt{G}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}R}\cos\theta\left(\frac{\partial R}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\theta\right)+ \\
&\qquad\qquad +\frac{\sqrt{G}}{r_1}\,\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cos\theta\right),
\end{aligned}
\right.
$$

e nel caso nostro, sussistendo le (18), (19), si verifica subito che ne seguono le (20).

Dimostrato così che la congruenza a falde focali S, S' è una congruenza W, basterà ora invocare il teorema generalizzato di Ribaucour (Mem. cit., § 16), che nello spazio ellittico assume la forma

$$k_0\,k'_0=\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}R}\right)^4,$$

essendo k_0, k'_0 le curvature (relative) delle due falde focali S, S'. e dalla (19) risulterà

$$k'_0=k_0=-\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{\operatorname{sen}^2 R}.$$

Si conclude che: *le due falde focali* S, S' *hanno in punti corrispondenti eguali curvature.*

Si sa che le superficie S dello spazio ellittico che formano le falde focali di siffatte congruenze W sono *caratterizzate* dalla proprietà (Mem. cit., § 17) che la loro curvatura relativa k_0, espressa pei parametri α, β delle asintotiche, prende la forma

$$\text{B)}\qquad k=-\left\{\frac{1+\varphi(\alpha)\,\psi(\beta)}{\varphi(\alpha)+\Psi(\beta)}\right\}^2,$$

da sostituirsi nello spazio ellittico alla formola euclidea A). Viceversa ogni superficie S dello spazio ellittico di questa classe B) è falda focale di ∞^2 congruenze dello spazio, onde per ogni tale S il problema proposto ammette ∞^1 soluzioni.

Risultati del tutto analoghi si hanno nel caso iperbolico $K_0 = -1$, dove le funzioni circolari di R sono da mutarsi nelle corrispondenti iperboliche, e la formola B) è da sostituirsi coll'altra

$$k_0 = -\left\{ \frac{1 + \varphi(\alpha)\,\psi(\beta)}{\varphi(\alpha) - \psi(\beta)} \right\}^2 .$$

Fisiologia. — *Innervazione del ricambio.* Memoria del Socio A. STEFANI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Meccanica celeste. — *Sulla Polodia.* Nota di G. BOCCARDI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota pubblicata in questi Rendiconti (1) si critica un articolo del dott. E. Roggero (*Bulletin Astronomique* 1913) che ha per oggetto alcune formole per determinare la polodia.

In assenza del Roggero (attualmente al fronte) ho giudicato opportuno di dettare altrove alcune pagine per spiegare il punto di vista nel quale egli si è probabilmente messo, non senza rilevare anche io che la esposizione del Roggero si presta all'equivoco ed è incompleta. Ho stimato doveroso dettar quelle pagine anche per ispiegare la fiducia con la quale ho senz'altro ripetute le conclusioni di lui. Credo però prezzo dell'opera il riassumere in questi stessi *Rendiconti* le cose principali da me pubblicate altrove.

Io non credo che le osservazioni sulla variazione della latitudine sieno destinate, come le esperienze di gabinetto nei corsi di fisica o chimica, a conferma di una qualche teoria (2) sulla rotazione terrestre. Ogni teoria di matematica applicata richiede il sostrato di ipotesi fisiche, ed ha tanto valore per quanto i fatti confermano siffatte ipotesi.

(1) V. Cerulli, *Sulla determinazione della polodia* (4 febbr. 1917).

(2) L'impostazione varia da teoria a teoria. Così per es., in un primo tipo, si considera la Terra rigida (Euler), ovvero costituita da un nucleo rigido, entro cui avvengono ciclici trasporti di massa (Volterra); in un secondo tipo, si tien conto di deformazioni elastiche (Lord Kelvin, Larmor) conservative, oppure (Darwin) dissipative, con speciale riguardo all'azione delle maree.