ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

rigoroso di verificare teorie e calcoli, e presenta nuovi problemi *reali* da affrontare.

Il sig Boccardi estende la sua obbiezione, relativa alla nutazione diurna, anche al metodo, cui io accennava nella mia Nota del febbraio u. s., di determinar la polodia in base alle due componenti dello spostamento del Zenit in un'unica stazione. Ma se le misure si distribuiscono con qualche uniformità lungo il corso della giornata, facendole p. es. di 6 in 6, o di 8 in 8 ore ecc. ecc., è pur chiaro che la nutazione, anche supponendone percettibile l'ampiezza, viene a restare, nel medio, eliminata. Io chiamai questo metodo *puramente teorico*, ma seppi poi che ha già dato buoni risultati pratici a Pulkova ed a Leida, in epoche nelle quali il metodo tanto più sicuro delle stazioni internazionali non era stato ancora messo in opera.

Matematica. — *Affinità e superficie applicabili.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Corrispondente Castelnuovo.

1. Nel costruire la teoria delle superficie applicabili di specie qualsiasi (¹) mi sono imbattuto nella seguente questione:

« Dati due spazi affini, esistono in essi superficie corrispondenti applicabili di una determinata specie? ».

Si prevede che, fissata la specie ν dell'applicabilità, l'esistenza di tali superficie dipende dalla dimensione degli spazi che si pongono in corrispondenza affine, perchè se gli spazi hanno dimensioni abbastanza piccole, le condizioni poste dall'applicabilità possono portare all'uguaglianza dei due spazi, quindi delle due superficie. Il problema consiste dunque nel determinare un limite per la dimensione $r+1$ dei due spazi tale che al di sotto di esso non possano esistere superficie corrispondenti applicabili di specie ν.

Nella nostra teoria vedremo che il caso più interessante è quello in cui la risposta alla domanda formulata è negativa; ma anche prescindendo da questa teoria, per la quale il teorema che abbiamo in vista è fondamentale, mi pare che la questione abbia per sè interesse e d'altra parte il metodo è abbastanza semplice perchè se ne possa comprendere l'esposizione staccata dal resto della teoria.

2. Cominciamo da alcune osservazioni affatto elementari sull'affinità fra due S_{r+1}, siano S ed $\overline{S}$.

Scelti due $(r+1)$-edri ortogonali corrispondenti (come si può), le equazioni della trasformazione fra S ed $\overline{S}$ sono del tipo

$$\overline{X}_i = l_i X_i \qquad (i = 1, \ldots, r+1).$$

(¹) Per le deformazioni di specie ν vedi la mia Nota: *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni delle superficie di specie superiore* [Rendic. Acc. dei Lincei, vol. XXV, serie 5ª, fasc. 9 (1916_1), pp. 627-634].

Punteggiate corrispondenti sono simili; il rapporto di similitudine dipende solo dalla direzione; in particolare sono uguali alle corrispondenti le rette di S che hanno le loro direzioni (che diremo *direzioni di uguaglianza*) sulla quadrica all'infinito:

$$\sum_1^{r+1} {}_i (l_i^2 - 1) X_i^2 = 0 \qquad X_{r+2} = 0 .$$

L'indice di specializzazione di questa quadrica si dirà anche *indice di specializzazione dell'affinità.*

È evidente che se in un piano vi sono tre rette uguali alle corrispondenti, i due piani corrispondenti sono uguali. Un piano contiene in generale due direzioni di rette uguali alle corrispondenti: se il loro angolo è uguale a quello delle corrispondenti, il loro piano è uguale al corrispondente. Da ciò segue che:

Se in uno S_k *vi sono* ∞^{k-2} *direzioni di uguaglianza non tutte di un* S_{k-1}, *e se una di esse forma con le altre angoli uguali ai corrispondenti, lo* S_k *è uguale al corrispondente nell'affinità.*

4. Esistono superficie applicabili in due S_3 affini?

Consideriamo punti corrispondenti delle due superficie σ e $\overline{\sigma}$ applicabili ed affini: le rette uscenti da quei punti e situate nei piani tangenti si corrispondono per uguaglianza, essendo uguali su di esse gli elementi lineari delle superficie.

Il cono delle rette d'uguaglianza col vertice in un punto della superficie σ contiene il piano ivi tangente: è dunque spezzato e per ragioni di continuità tutti i piani tangenti dovrebbero passare per la traccia di uno di essi sul piano all'infinito.

Ciò è impossibile se la superficie stessa non è un piano e proprio un dei piani uguali ai corrispondenti.

Se due spazi S_3 *riferiti in modo affine possoggono due superficie corrispondenti applicabili, i due spazi, quindi le due superficie, si ottengono l'uno dall'altro con un movimento.*

4. Esaminiamo la stessa questione in S_4.

I piani tangenti alla superficie di S devono passare per le generatrici di un sistema della quadrica delle direzioni di uguaglianza; cioè nel caso generale vi sarebbero ∞^1 piani tangenti per ogni generatrice: assurdo. Se poi esistessero soli ∞^1 piani tangenti (la superficie sarebbe sviluppabile) le loro rette all'∞ dovendo essere incidenti se infinitamente vicine, non possono appartenere alla quadrica.

Se la quadrica all'infinito si specializza, cioè se l'affinità è speciale e possiede ∞^1 giaciture d'uguaglianza, aventi in comune una direzione, ∞^1 piani aventi quelle giaciture inviluppano un cilindro applicabile sul corrispondente.

Infatti, se le equazioni dell'affinità speciale sono

$$\overline{X}_i = l_i X_i \qquad (i = 1, 2, 3) \text{ e } \overline{X}_4 = X_4$$

assunta nello S_3 (X_1, X_2, X_3) una *curva*

$$X_i = X_i(u)$$

tale che

$$\sum_{1}^{3}{}_i (l_i^2 - 1)\left(\frac{dX_i}{du}\right)^2 = 0,$$

ogni cilindro per essa con le generatrici parallele ad X_4 è applicabile sul corrispondente, senza essere affatto uguale ad esso. Tutte le curve nominate si sanno costruire perchè si ottengono con l'affinità

$$X_i' = \sqrt{l_i^2 - 1}\, X_i$$

dalle curve isotrope dello spazio S_3 (X_1', X_2', X_3').

Se poi la quadrica di uguaglianza si spezza in due piani, i piani tangenti debbono tutti incidere lungo rette uno di essi. Da ciò si deduce subito che la superficie sta in S_3; siamo quindi nel caso di prima. Quindi:

Neppure in due S_4 *affini esistono superficie corrispondenti applicabili (esclusi i cilindri inviluppati da piani uguali se l'affinità è speciale).*

5. In S_5. Consideriamo in un punto della superficie il piano osculatore ad una linea a prima curvatura invariante [1]. Anche questo è (oltre il piano tangente) uguale al suo corrispondente: quindi l'affinità fra i due piani fa corrispondere alla tangente e alla prima normale principale alla curva gli elementi analoghi della curva trasformata. D'altronde, come vedremo subito, l'angolo della prima normale principale detta con una tangente assegnata è uguale al corrispondente: per l'osservazione fatta sull'affinità, lo S_3 che congiunge il piano tangente al piano osculatore ad una curva di prima curvatura invariante, è uguale al corrispondente.

Da quanto abbiamo detto risulta che in ogni punto della superficie esiste *almeno* uno S_3 uguale al corrispondente. Cioè la quadrica dello S_4 all' ∞ di S_5 che dà le direzioni d'uguaglianza contiene dei piani.

Perchè ciò sia, la quadrica dev'essere specializzata.

Se è specializzata una volta si compone di ∞^1 S_2 per un punto: ∞^1 di quegli S_3 passano per un S_2, quindi ∞^1 S_2 tangenti tagliano uno S_2 della quadrica in rette e per ciò stanno in uno S_3. Dunque la superficie ha ∞^2 curve in S_3: ma i piani tangenti lungo una di esse stanno in S_3, quindi ogni S_3 contiene due di queste curve infinitamente vicine e, perciò, se la

(1) *Basi analitiche* ecc.. ultimo alinea del n. 5.

superficie non sta in S_3 (nel qual caso sarebbe rimasta rigida) le curve stanno in S_2 osculatori ad una curva. Le rette all'infinito di due di questi piani infinitamente vicini s'incidono: ciò non è possibile che se tutte queste rette stanno in un piano della quadrica di S_4 (e si avrebbero di nuovo superficie uguali alle corrispondenti), o se passano per il vertice: in questo caso, l'unico che risponda al nostro problema, la superficie è un cilindro inviluppato dai piani uguali ai corrispondenti.

Se la quadrica fosse due volte specializzata, si vedrebbe analogamente che la superficie contiene ∞^1 curve in piani passanti per la sua retta vertice; contiene altresì ∞^1 curve negli S_3 normali a questa giacitura: le tangenti a queste curve vanno ad appoggiarsi alla conica segata dallo S_2 all'infinito degli S_3 sulla quadrica.

Se due S_5 sono riferiti in un'affinità non speciale e contengono superficie applicabili di prima specie corrispondenti, essi, come pure le superficie corrispondenti, sono uguali.

Se l'affinità è una o due volte specializzata, possono aversi risp. cilindri e superficie con ∞^1 curve in un sistema di piani paralleli, delle particolari specie sopra descritte, applicabili e non uguali ai corrispondenti.

6. Una deformazione di specie ν di una superficie lascia inalterati gli elementi lineari e le prime $\nu-1$ curvature di tutte le sue curve. Riferiti i punti corrispondenti di due superficie applicabili di specie ν alle stesse coordinate curvilinee u, v, i simboli

$$[hklm]=\sum_1^n {}_i \frac{\partial^{h+k} X_i}{\partial u^h \partial v^k} \frac{\partial^{l+m} X_i}{\partial u^l \partial v^m}=[lmhk]$$

per

$$h+k \leq \nu \quad , \quad l+m \leq \nu$$

sono uguali in punti corrispondenti delle due superficie [1]. Se $h+k \geq l+m$ si dice che $h+k$ è l'*ordine* del simbolo; si dimostra che sono anche uguali i simboli *dedotti* d'ordine $\nu+1$, per i quali

$$\nu+1=h+k>l+m .$$

7. Consideriamo una curva (sulla quale assumeremo variabile la sola u) di una superficie ed un suo punto P: determiniamo l'angolo della sua prima normal principale con una tangente alla superficie in P. I coseni direttori della prima retta sono proporzionali a

$$\begin{vmatrix} \Sigma_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial X_i}{\partial u} \\ \Sigma_i \frac{\partial X_i}{\partial u}\frac{\partial^2 X_i}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 X_i}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

[1] Nota citata, n. 5.

e quelli della seconda a $\frac{\partial X_i}{\partial u} + \lambda \frac{\partial X_i}{\partial v}$ (λ è il parametro che individua la tangente fissata). Il coseno del loro angolo è funzione di λ, di simboli del primo ordine, di simboli dedotti del secondo ordine e del simbolo [2020]. Per due superficie applicabili, siccome la rappresentazione è conforme, tangenti corrispondenti sono individuate dallo stesso valore di λ: i simboli nominati, eccetto al più [2020], sono pure uguali per le due superficie. Se poi la curva di cui trattasi è a prima curvatura invariante, anche [2020] è invariante.

Si ha dunque:

In una deformazione di prima specie è invariante l'angolo che la normale principale in un punto di una curva a prima curvatura invariante forma con il piano tangente.

Questa è l'osservazione già applicata al n. 5.

Se poi la deformazione è di seconda specie, ogni curva conserva la prima curvatura; quindi:

In una deformazione di seconda specie è invariante l'angolo che la normale principale ad una curva qualsiasi in un suo punto forma col piano ivi tangente.

8. Ricordiamo ora la definizione di spazio h-tangente, $S(h)$, ad una superficie in un suo punto (¹): esso è lo spazio definito dal punto (X_i) stesso e dai suoi derivati $\left(\frac{\partial X_i}{\partial u}\right), \left(\frac{\partial X_i}{\partial v}\right), \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial u^2}\right), \ldots$ fino a quelli di ordine h. Lo $S(h)$ contiene gli S_h osculatori alle curve della superficie nel punto, ma in generale non coincide col loro luogo. La sua dimensione per $h > 1$, ed escluse le ordinarie sviluppabili, è compresa fra $h + 2$ ed $\frac{h(h+3)}{2}$; due $S(h)$ h-tangenti in due punti successivi, si tagliano in uno $S(h-1)$.

Vogliamo dimostrare che *in una deformazione di specie ν fra due superficie affini gli $S(\nu)$ corrispondenti sono uguali.*

Consideriamo una curva qualsiasi di una superficie ed un suo punto, la tangente ivi, il piano osculatore, ..., lo S_ν osculatore. È subito visto che questi spazi sono uguali ai corrispondenti.

Gli S_ν osculatori alle curve di una superficie uscenti da un suo punto formano un cono algebrico entro lo $S(\nu)$, ma in generale non lo riempiono; quindi l'uguaglianza degli S_ν osculatori corrispondenti non basta, se lo $S(\nu)$ è abbastanza ampio, ad assicurare l'uguaglianza dei due $S(\nu)$ corrispondenti.

Pensiamo allora due curve uscenti da un punto della superficie, i loro S_ν ivi osculatori e una retta in ciascuno di essi. L'angolo di queste rette di-

(¹) Cfr. la mia Nota *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* [Atti Acc. di Torino, vol. XLVIII, 1913], n. 5, ove questo spazio è indicato con $S(h, 0)$.

pende dai parametri che servono a fissare ciascuna di esse entro il proprio S_ν e, come si vede subito, da simboli d'ordine $\leq \nu$.

Siccome quei due S_ν sono uguali ai corrispondenti nell'affinità, i parametri che individuano una retta entro uno di essi sono uguali a quelli che individuano la retta corrispondente entro lo S_ν corrispondente. I simboli di ordine $\leq \nu$ rimangono invariati in una deformazione di specie ν, quindi gli angoli di quelle due rette sono invarianti per deformazione. Siccome queste due rette sono arbitrarie, sempre per la stessa osservazione fatta sull'affinità, anche lo spazio congiungente quei due S_ν è uguale al corrispondente.

Su questi nuovi spazi, uguali ai corrispondenti, ragioniamo come prima. O essi riempiono lo $S(\nu)$ e allora questo è uguale al corrispondente; o essi non riempiono lo $S(\nu)$ e allora consideriamo due di quegli spazi e dimostriamo, come sopra, che il loro congiungente è uguale al corrispondente. Con questo procedimento si vengono ad ampliare ogni volta la dimensione degli spazi che si dimostrano uguali ai corrispondenti e il loro sistema. Quando questo riempie lo $S(\nu)$ allora la dimostrazione è terminata.

9. Siamo giunti a questo; che *gli $S(\nu)$ tangenti a due superficie affini ed applicabili di specie ν in punti corrispondenti sono uguali*.

Quindi il cono quadrico passante per un punto della superficie data, formato dalle rette uguali alle corrispondenti, contiene lo $S(\nu)$ tangente ivi alla superficie.

Se escludiamo il caso delle ordinarie sviluppabili, nel qual caso lo $S(\nu)$ è uno $S_{\nu+1}$ e ne esistono soli ∞^1 per una superficie [1], lo $S(\nu)$ è almeno un $S_{\nu+2}$: in tal caso lo $S(\nu-1)$ è uno $S_{\nu+1}$ (se $\nu > 2$; per $\nu = 2$ si ha $S(1) = S_2$).

Il nostro problema ci porta dunque a questa domanda:

Quand'è che la quadrica delle direzioni uguali nello S_r all'infinito di S_{r+1} contiene ∞^2 $S_{\nu+1}$ e in tal posizione che quelli infinitamente vicini ad uno di essi passano per uno S_ν?

Applicando al nostro caso formole note [2] nell'ipotesi che la quadrica di S_r non sia specializzata, si vede che ciò è possibile solo se $r > 2\nu + 4$ per $\nu > 2$, e se $r > 7$ per $\nu = 2$. Quindi:

In due spazi affini di dimensione $\leq 2\nu + 5$, se l'affinità è generale, non esistono superficie applicabili di specie $\nu\,(> 2)$.

Se $\nu = 2$ non esistono superficie applicabili in due spazi affini di dimensione ≤ 8.

(1) Per le sviluppabili il problema si risolve subito: basta cercare le curve di una quadrica di S_r i cui S_ν osculatori appartengono alla quadrica stessa; si trova subito che dev'essere $r \geq 2\nu + 2$. Del resto, dal punto di vista dell'applicabilità, le sviluppabili costituiscono un caso banale il cui interesse è minimo.

(2) Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri 1907), pag. 131, nn. 17 e 18.

Se poi l'affinità è specializzata h volte, la superficie si compone di ∞^1 curve giacenti in S_h paralleli (passanti per lo S_{h-1} vertice della quadrica): le curve sezioni degli S_h con gli S_{r-h+1} ad essi normali, hanno i loro S_ν osculatori uguali ai corrispondenti: quindi gli $S_{\nu-1}$ all'infinito appartengono alla quadrica non degenere dello S_{r-h} all'infinito degli S_{r-h+1}. Di qua si ha la limitazione $h < 3$.

Matematica. — *I moti relativi nel calcolo assoluto.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sull'estendibilità del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra ad un conduttore elettrico a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo e sottoposto all'azione di un campo magnetico qualunque.* Nota di Orazio Lazzarino, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. Fin dal 1882 il prof. Volterra [1], partendo dal teorema di Green generalizzato da Thomson e Tait, ha stabilito il seguente teorema di reciprocità: « Se in un conduttore a due o a tre dimensioni di cui la conducibilità varia con continuità da punto a punto si fa passare una corrente di intensità I da un punto A ad un punto B, e in due punti C e D si ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti A e B quando si faccia entrare da C e uscire da D la stessa corrente di intensità I ».

Questo interessante teorema ebbe nello stesso anno la conferma sperimentale dalle esperienze fatte in proposito dal prof. G. Poloni [2].

Nel 1915, in seguito alle ricerche del prof. O. M. Corbino [3] sul movimento della elettricità in una lamina metallica *sottoposta all'azione di un campo magnetico*, il prof. Volterra estese il suo teorema al caso di una lamina conduttrice isotropa, piana o curva, omogenea o non omogenea, di-

(1) Vito Volterra, *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti in un corpo qualunque*, Nuovo Cimento, ser. III, vol. XI, anno 1882, pag. 188.

(2) G. Poloni, *A proposito della Nota del prof. V. Volterra sulla reciprocità delle correnti e delle temperature*, Nuovo Cimento, ser. III, vol. XII, anno 1882, pag. 58.

(3) O. M. Corbino, *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico*, Rendic. della R. Accad. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 213.