ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Se poi l'affinità è specializzata h volte, la superficie si compone di ∞^1 curve giacenti in S_h paralleli (passanti per lo S_{h-1} vertice della quadrica): le curve sezioni degli S_h con gli S_{r-h+1} ad essi normali, hanno i loro S_ν osculatori uguali ai corrispondenti: quindi gli $S_{\nu-1}$ all'infinito appartengono alla quadrica non degenere dello S_{r-h} all'infinito degli S_{r-h+1}. Di qua si ha la limitazione $h < 3$.

Matematica. — *I moti relativi nel calcolo assoluto.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sull' estendibilità del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra ad un conduttore elettrico a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo e sottoposto all'azione di un campo magnetico qualunque.* Nota di Orazio Lazzarino, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. Fin dal 1882 il prof. Volterra [1], partendo dal teorema di Green generalizzato da Thomson e Tait, ha stabilito il seguente teorema di reciprocità: « Se in un conduttore a due o a tre dimensioni di cui la conducibilità varia con continuità da punto a punto si fa passare una corrente di intensità I da un punto A ad un punto B, e in due punti C e D si ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti A e B quando si faccia entrare da C e uscire da D la stessa corrente di intensità I ».

Questo interessante teorema ebbe nello stesso anno la conferma sperimentale dalle esperienze fatte in proposito dal prof. G. Poloni [2].

Nel 1915, in seguito alle ricerche del prof. O. M. Corbino [3] sul movimento della elettricità in una lamina metallica *sottoposta all'azione di un campo magnetico*, il prof. Volterra estese il suo teorema al caso di una lamina conduttrice isotropa, piana o curva, omogenea o non omogenea, di-

[1] Vito Volterra, *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti in un corpo qualunque*, Nuovo Cimento, ser. III, vol. XI, anno 1882, pag. 188.

[2] G. Poloni, *A proposito della Nota del prof. V. Volterra sulla reciprocità delle correnti e delle temperature*, Nuovo Cimento, ser. III, vol. XII, anno 1882, pag. 58.

[3] O. M. Corbino, *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico*, Rendic. della R. Accad. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 213.

sposta secondo una superficie di livello di un campo magnetico uniforme o non uniforme, munito di quattro elettrodi puntiformi, o di area finita e resistenza trascurabile, inseriti nell'interno o al contorno della lamina ([1]).

Anche sotto questa forma il teorema fu pienamente confermato dai risultati sperimentali ottenuti dal dott. G. Tasca Bordonaro ([2]) e dai professori O M. Corbino e G. C. Trabacchi ([3]).

Più recentemente la dott. E. Freda ([4]) è riuscita ad estendere, sotto certe condizioni, il detto teorema al caso di un conduttore a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo, fornito di quattro elettrodi e disposto comunque in un campo magnetico qualsiasi, eseguendo anche delle prove sperimentali che hanno dato risultati positivi.

In questa Nota io mi propongo di trovare, in modo nuovo, rapido e semplice, e nel caso più generale, sia le equazioni che individuano il movimento dell'elettricità, sia quelle che dimostrano il detto teorema di reciprocità.

2. Supponendo, come nella teoria elettronica del Drude, che la corrente sia trasportata con meccanismo convettivo dagli ioni positivi e negativi liberamente vaganti in seno ai metalli, siano N_1, N_2 i numeri di ioni positivi e negativi per centimetro cubo; e il valore assoluto della carica elettrica comune per le due specie di ioni; P_1, P_2 due ioni generici di cui uno positivo e l'altro negativo; $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ i vettori delle forze elettromotrici totali che sollecitano i detti ioni; $\mathbf{h}$ il vettore del campo magnetico; $\mathbf{F}$ il vettore della forza elettrica che supponiamo ammetta un potenziale φ. Allora la densità elettrica della corrente sarà espressa dal vettore

$$(1) \qquad \mathbf{u} = e(N_1 P_1' - N_2 P_2')$$

dove P_1' e P_2', derivate di P_1 e P_2 rispetto al tempo, rappresentano rispettivamente le velocità degli ioni positivi e negativi.

Indicando con γ_1 e γ_2 le due omografie, funzioni del punto generico P, che caratterizzano le proprietà specifiche del conduttore, per la legge di *Ohm* relativa ai mezzi anisotropi si hanno le relazioni:

$$(2) \qquad P_1' = e\gamma_1 \mathbf{E}_1 \quad ; \quad P_2' = -e\gamma_2 \mathbf{E}_2$$

([1]) Vito Volterra, *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pp. 220, 289, 378, 533.

([2]) G. Tasca Bordonaro, *Su alcune conseguenze della teoria generale del fenomeno di Hall*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 336; *La verifica del principio di reciprocità di Volterra, nel caso generale*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 709.

([3]) O. M. Corbino e G. C. Trabacchi, *Sulla resistenza elettrica di una lamina in un campo magnetico*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 806.

([4]) Elena Freda, *Sopra un teorema di reciprocità relativo alla propagazione di correnti elettriche in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. V, vol. XXV, 2° sem. 1916, pp. 28 e 60.

da cui, supposte γ_1 e γ_2 invertibili, si ricava

(2′) $$e\mathbf{E}_1 = \gamma_1^{-1}\,\mathrm{P}_1' \quad ; \quad e\mathbf{E}_2 = -\,\gamma_2^{-1}\,\mathrm{P}_2' .$$

Si può ritenere che i coefficienti N_1 ed N_2 e le omografie γ_1 e γ_2 possano eventualmente dipendere dal campo magnetico $\mathbf{h}$, ma che non mutino al variare del senso del campo; ciò è conforme ai risultati sperimentali i quali inducono ad ammettere che le proprietà specifiche del conduttore siano alterate dall'azione del campo magnetico, ma che tali alterazioni non dipendano dal senso del campo.

D'altra parte, supposto il conduttore mantenuto a temperatura costante, la forza elettromotrice totale che sollecita ogni ione è data solamente dalla forza elettrica, dipendente dalla distribuzione dei potenziali, e dalla f. e. m. che si genera per il movimento dello ione nel campo magnetico, e quindi si può scrivere:

(3) $$\mathbf{E}_1 = \mathbf{F} + \mathbf{h} \wedge \mathrm{P}_1' \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{F} + \mathbf{h} \wedge \mathrm{P}_2' .$$

Eliminando fra le (2′) e le (3) le forze elettromotrici, si ha:

$$(\gamma_1^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge)\,\mathrm{P}_1' = e\mathbf{F} \quad ; \quad (\gamma_2^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge)\,\mathrm{P}_2' = -\,e\mathbf{F} ,$$

onde, supposte invertibili queste due omografie,

$$\mathrm{P}_1' = e(\gamma_1^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1}\,\mathbf{F} \quad ; \quad \mathrm{P}_2' = -\,e\,(\gamma_2^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1}\,\mathbf{F} .$$

Ponendo per brevità:

(4) $$\alpha = (\gamma_1^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1} \quad ; \quad \beta = (\gamma_2^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1}$$

ed osservando che, per l'ipotesi fatta,

$$\mathbf{F} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

si ricavano le espressioni delle velocità P_1' e P_2' in funzione del potenziale, cioè:

(5) $$\mathrm{P}_1' = -\,e\,\alpha\,\mathrm{grad}\,\varphi \quad ; \quad \mathrm{P}_2' = e\,\beta\,\mathrm{grad}\,\varphi .$$

Sostituendo queste nella (1), si ha immediatamente la densità della corrente espressa per mezzo di φ:

(6) $$\mathbf{u} = -\,e^2(\mathrm{N}_1\,\alpha\,\mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{N}_2\,\beta\,\mathrm{grad}\,\varphi).$$

Inoltre, dalla condizione di continuità, cui deve soddisfare la corrente,

(7) $$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 ,$$

si ricava, mediante la (6), l'equazione differenziale cui deve soddisfare il potenziale φ.

Indicando, infine, con $\mathbf{n}$ un vettore unitario, normale alla superficie del conduttore in un suo punto qualunque e rivolto verso l'esterno, si ha evidentemente:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \,, \tag{8}$$

da cui si deduce per φ una condizione al contorno.

3. Stabilite così le relazioni tra la densità di corrente ed il potenziale, si dimostra facilmente il teorema di reciprocità del Volterra, che, *nella sua forma più generale*, può enunciarsi:

« In un conduttore elettrico a tre dimensioni, anisotropo, non omogeneo, « munito di quattro elettrodi A, B, C, D di resistenza trascurabile, man- « tenuto a temperatura costante e disposto comunque in un campo magne- « tico qualsiasi, la differenza di potenziale che si stabilisce tra C e D, al « passaggio di una corrente elettrica che entra per A ed esce per B, è « uguale alla differenza di potenziale che si stabilisce tra A e B quando, « col campo invertito, una corrente d'intensità eguale alla precedente entra « per C ed esce per D ».

Siano φ_1 e $\mathbf{u}_1$ il potenziale e la densità di corrente quando, col campo diretto, la corrente entra per A ed esce per B; φ_2 e $\mathbf{u}_2$ gli stessi elementi quando, col campo invertito, la corrente entra per C ed esce per D; σ il contorno completo del conduttore; S lo spazio, una o più volte connesso, racchiuso dalla superficie σ. Supponiamo che le funzioni φ_1 e φ_2 siano regolari in tutto lo spazio S e che il vettore normale $\mathbf{n}$ precedentemente considerato sia rivolto verso l'esterno di S.

Applicando il noto teorema della divergenza, si ha:

$$\int_\sigma \varphi_2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} \, . \, d\sigma = \int_S \operatorname{div} (\varphi_2 \mathbf{u}_1) \, dS$$

ossia

$$\int_\sigma \varphi_2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} \, . \, d\sigma = \int_S (\varphi_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \operatorname{grad} \varphi_2 \times \mathbf{u}_1) \, dS$$

e per la (7)

$$\int_\sigma \varphi_2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} \, . \, d\sigma = \int_S \operatorname{grad} \varphi_1 \times \mathbf{u}_2 \, . \, dS \,. \tag{9}$$

In modo analogo si ricava l'uguaglianza

$$\int_\sigma \varphi_1 \mathbf{u}_2 \times \mathbf{n} \, . \, d\sigma = \int_S \operatorname{grad} \varphi_1 \times \mathbf{u}_2 \, . \, dS \,, \tag{10}$$

e da (9) e (10) si ha subito, per differenza:

$$\int_\sigma (\varphi_2 \mathbf{u}_1 - \varphi_1 \mathbf{u}_2) \times \mathbf{n} \, . \, d\sigma = \int_S (\mathbf{u}_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 - \mathbf{u}_2 \times \operatorname{grad} \varphi_1) \, dS \,.$$

Sostituendo nel secondo membro di questa eguaglianza, al posto dei vettori $\mathbf{u}$, le corrispondenti espressioni date dalla (6) e indicando con α' e β' le omografie definite dalle (4) quando al posto di $\mathbf{h}$ si ponga $-\mathbf{h}$, cioè

$$(4') \qquad \alpha' = (\gamma_1^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1} \quad , \quad \beta' = (\gamma_2^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1} \, ,$$

risulta:

$$\int_\sigma (\varphi_2\,\mathbf{u}_1 - \varphi_1\,\mathbf{u}_2) \times \mathbf{n}\,.\,d\sigma =$$

$$= - e^2 \int_S \Big[\mathrm{N}_1 (\alpha \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 - \alpha' \operatorname{grad} \varphi_2 \times \operatorname{grad} \varphi_1) + $$
$$+ \mathrm{N}_2 (\beta \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 - \beta' \operatorname{grad} \varphi_2 \times \operatorname{grad} \varphi_1) \Big] dS$$

ossia, per il teorema di commutazione:

$$(11) \qquad \int_\sigma (\varphi_2\,\mathbf{u}_1 - \varphi_1\,\mathbf{u}_2) \times \mathbf{n}\,.\,d\sigma =$$

$$= - e^2 \int_S \Big[\mathrm{N}_1 (\alpha - \mathrm{K}\alpha') + \mathrm{N}_2 (\beta - \mathrm{K}\beta') \Big] \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2\,.\,dS\,.$$

Dalla (11) segue che, se in ciascun punto del conduttore è soddisfatta la condizione

$$(12) \qquad \mathrm{N}_1 (\alpha - \mathrm{K}\alpha') + \mathrm{N}_2 (\beta - \mathrm{K}\beta') = 0$$

ossia, data l'arbitrarietà di N_1 ed N_2, sono soddisfatte le condizioni

$$(12') \qquad \alpha - \mathrm{K}\alpha' = 0 \quad ; \quad \beta - \mathrm{K}\beta' = 0$$

risulta:

$$(13) \qquad \int_\sigma (\varphi_2\,\mathbf{u}_1 - \varphi_1\,\mathbf{u}_2) \times \mathbf{n}\,.\,d\sigma = 0$$

eguaglianza perfettamente analoga a quella da cui il prof. Volterra ha dedotto il teorema di reciprocità per la lamina.

Ora, perchè le (12') siano soddisfatte, qualunque sia il campo magnetico $\mathbf{h}$, è necessario e basta ammettere che in ogni punto del campo, per qualunque valore di $\mathbf{h}$, le omografie γ_1 e γ_2, che definiscono le proprietà specifiche del conduttore, siano *dilatazioni*, ossia che si abbia

$$(14) \qquad \gamma_1 - \mathrm{K}\gamma_1 = 0 \qquad \gamma_2 - \mathrm{K}\gamma_2 = 0\,.$$

Ciò si dimostra molto facilmente, osservando che dalle (4) e (4') si ha:

$$\alpha^{-1} = \gamma_1^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge \quad ; \quad \beta^{-1} = \gamma_2^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge$$
$$\mathrm{K}\alpha'^{-1} = \mathrm{K}\gamma_1^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge \quad ; \quad \mathrm{K}\beta'^{-1} = \mathrm{K}\gamma_2^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge$$

da cui, per differenza, si ricava:

$$(15) \qquad \alpha^{-1} - K\alpha'^{-1} = \gamma_1^{-1} - K\gamma_1^{-1} \quad ; \quad \beta^{-1} - K\beta'^{-1} = \gamma_2^{-1} - K\gamma_2^{-1} .$$

Ne segue che, se sono verificate le (14), i secondi membri delle (15) risultano nulli e da qui si trae subito che sono soddisfatte le (12′).

Reciprocamente, se le (12′) sono verificate, le (15) dimostrano che saranno pure verificate le (14).

Nel caso del campo magnetico nullo, cioè $\mathbf{h} = 0$, risulta:

$$\alpha = \alpha' = \gamma_1 \quad ; \quad \beta = \beta' = \gamma_2$$

e quindi le (12′) si identificano con le (14).

Supposto dunque che per il conduttore in esame siano verificate le condizioni (14), che cioè le omografie che definiscono le proprietà specifiche del conduttore siano *dilatazioni*, basta scegliere convenientemente nella (13) il contorno completo σ perchè sia applicabile l'enunciato teorema di reciprocità.

Nel caso di quattro elettrodi A, B, C, D puntiformi, basta assumere come contorno completo σ la superficie del conduttore più quella di quattro piccole sfere (o porzioni di sfere se trattasi di elettrodi situati sulla superficie del conduttore) aventi i centri nei punti occupati dagli elettrodi.

Difatti, osservando che per la superficie libera ed isolata del conduttore si ha per la (8):

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \times \mathbf{n} = 0 ,$$

si vede facilmente, con un procedimento analogo a quello adoperato dal prof. Volterra per la lamina, che, facendo tendere a zero i raggi delle sfere, se l'intensità della corrente che attraversa il conduttore è la stessa col campo magnetico diretto e col campo invertito, dalla (13) si deduce l'eguaglianza

$$(16) \qquad \varphi_{1C} - \varphi_{1D} = \varphi_{2A} - \varphi_{2B}$$

che esprime il teorema di reciprocità. Occorre però ammettere che, detta d la distanza di un punto generico da un punto occupato da un elettrodo, le funzioni φ_1 e φ_2 siano in quest'ultimo punto finite o presentino un infinito di ordine inferiore a quello di $1 : d^2$.

Nel caso poi di quattro elettrodi non puntiformi ma di resistenza trascurabile, se sono a tre dimensioni e inseriti nella massa del conduttore, per dedurre la (16) basta assumere per σ la superficie del conduttore più quella che esso ha in comune con gli elettrodi; se invece sono laminari e al contorno si prende σ uguale alla sola superficie del conduttore.

4. Tra i casi, che si possono facilmente stabilire, per i quali sono verificate le (14), è particolarmente interessante quello di un conduttore iso-

tropo che, sottoposto all'azione di un campo magnetico, acquisti una temporanea anisotropia solo per effetto del campo.

Per vedere come in tal caso le omografie γ_1 e γ_2 che caratterizzano le proprietà specifiche del conduttore siano effettivamente *dilatazioni*, consideriamo la superficie di livello del campo magnetico passante per un punto P qualunque del conduttore ed un sistema unitario, ortogonale, destrorso di tre vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, avente il piano $\mathbf{ij}$ tangente in P alla detta superficie di livello. Poichè, per evidenti ragioni di simmetria, tutte le direzioni uscenti da P ed appartenenti al piano $\mathbf{ij}$ sono equivalenti dal punto di vista elettromagnetico, si conclude che le velocità degli ioni e le rispettive forze elettromotrici devono essere complanari con la forza magnetica, cioè

$$P_1' \wedge \mathbf{E}_1 \times \mathbf{k} = 0 \qquad P_2' \wedge \mathbf{E}_2 \times \mathbf{k} = 0$$

essendo evidentemente il vettore $\mathbf{h}$ parallelo a $\mathbf{k}$.

Di qui si trae facilmente che le velocità P_1' e P_2' degli ioni positivi e negativi possono scriversi sotto la forma:

$$\begin{aligned} P_1' &= e(a_1 \mathbf{E}_1 \times \mathbf{i} \,.\, \mathbf{i} + a_1 \mathbf{E}_1 \times \mathbf{j} \,.\, \mathbf{j} + b_1 \mathbf{E}_1 \times \mathbf{k} \,.\, \mathbf{k}) \\ P_2' &= e(a_2 \mathbf{E}_2 \times \mathbf{i} \,.\, \mathbf{i} + a_2 \mathbf{E}_2 \times \mathbf{j} \,.\, \mathbf{j} + b_2 \mathbf{E}_2 \times \mathbf{k} \,.\, \mathbf{k}) \end{aligned}$$

dove a_1, a_2, b_1, b_2 sono delle quantità reali.

Tenendo presenti le (2), si vede immediatamente che le omografie γ_1 e γ_2 sono in tal caso definite dalle seguenti uguaglianze [1]:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 \mathbf{i} , & a_1 \mathbf{j} , & b_1 \mathbf{k} \\ \mathbf{i} , & \mathbf{j} , & \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} a_2 \mathbf{i} , & a_2 \mathbf{j} , & b_2 \mathbf{k} \\ \mathbf{i} , & \mathbf{j} , & \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

onde si conclude che le omografie γ_1 e γ_2 sono effettivamente *dilatazioni* aventi per *direzioni principali* quelle dei vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sopra considerati.

[1] Cfr. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*. T. I, p. 21, Pavia 1912.