ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie.* Nota di GUSTAVO SANNIA [1], presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. Accanto ad ogni serie numerica

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{1}$$

consideriamo la serie di potenze

$$u(x) = u^{(0)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

e quelle che se ne deducono mediante derivazione o integrazione ripetuta, cioè

$$u^{(r)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{x^n}{n!} \qquad (r \text{ intero}),$$

convenendo che sia

$$u_n = 0 \quad \text{per} \quad n < 0 .$$

Diremo che la serie (1) *è sommabile col metodo di Borel di ordine* r, e scriveremo *è sommabile* (B, r), se la (2) è una trascendente intera e l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r)}(x)\, dx \tag{3}$$

è convergente. Allora diremo *somma* della (1) il valore di questo integrale aumentato di

$$\mathrm{U}_{r-1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{r-1} .$$

2. Abbiamo così definita una successione (indefinita in due sensi) di metodi di sommazione

$$\ldots, (\mathrm{B}, -2), (\mathrm{B}, -1), (\mathrm{B}, 0), (\mathrm{B}, 1), (\mathrm{B}, 2), \ldots \tag{4}$$

tutti analoghi a quello ben noto del Borel (o metodo *esponenziale*) che corrisponde al nostro metodo $(\mathrm{B}, 0)$.

Ciascuno di essi è *più potente* del metodo classico di sommazione, poichè:

Ogni serie convergente con somma u *è anche sommabile* (B, r) *qualunque sia* r, *e con ugual somma* (ma non viceversa).

[1] I risultati contenuti in questa Nota saranno dimostrati e sviluppati in una prossima Memoria.

Inoltre ciascuno dei metodi (4) è più potente di tutti i seguenti ed è meno potente di tutti i precedenti, poichè:

Ogni serie sommabile (B, r) *con somma u è anche sommabile* (B, $r-1$) *e con ugual somma* (ma non viceversa).

Tutto ciò assicura che i metodi (4) non sono contraddittorii, nè col metodo classico di sommazione, nè tra di loro, e rende inoltre legittima la seguente

Definizione. Diremo che una serie *è sommabile col metodo di Borel generalizzato,* e scriveremo *è sommabile* Bg, quando è sommabile con *qualcuno* dei metodi (4) (ed allora è sommabile con tutti i precedenti e con ugual somma); e diremo *somma* della serie quella somma che tal metodo le conferisce.

3. Evidentemente *il nuovo metodo* Bg *è molto più potente del metodo originario* (B, 0) *del Borel.*

Ma il fatto più notevole, e che lo rende passibile di larghissima applicazione, è che *esso ammette tutto l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti* [1], come risulta dai teoremi seguenti.

I. *Se delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \ , \quad u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + (u_n + k) + u_{n+1} + \cdots$$

una è sommabile (B, r), *tale è anche l'altra, e la somma della seconda è uguale a quella della prima aumentata di* k.

II. *Se delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad , \quad ku_0 + ku_1 + ku_2 + \cdots \qquad (k \neq 0)$$

una è sommabile (B, r), *tale è anche l'altra, e la somma della seconda è uguale a quella della prima moltiplicata per* k.

III. *Se le due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad , \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

sono sommabili (B, r) *e* (B, s) *ed hanno per somma* u *e* v *rispettivamente, la serie*

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots$$

è sommabile (B, r), *se* $r \geq s$, *ed ha per somma* $u + v$.

[1] Lo stesso non può dirsi del metodo (B, 0) del Borel. Cfr. in proposito le nostre recenti Note: *Nuova trattazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. LII, 1916-1917, pag. 67); *Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie* (questi Rendiconti, vol. XXVI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 3°).

IV. *Se la serie* (1) *è sommabile* (B, r) *ed ha per somma* u, *la serie*

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

è sommabile (B, $r-n$) *ed ha per somma* $u-(u_0+\cdots+u_{n-1})$; *e viceversa.*

Corollario 1°. (Proprietà commutativa). — *Cambiando l'ordine di un numero finito di termini di una serie sommabile* (B, r), *essa non si altera, cioè si ha una serie che è pure sommabile* (B, r) *e con ugual somma.*

Corollario 2°. — *Inserendo in una serie sommabile* (B, r) *un numero finito* n *di termini, si ha una serie sommabile* (B, $r-n$), *la cui somma è uguale a quella della prima aumentata della somma dei termini inseriti; sopprimendo da una serie sommabile* (B, r) *un numero finito* n *di termini, si ha una serie sommabile* (B, $r+n$), *la cui somna è uguale a quella della prima diminuita della somma dei termini soppressi.*

Corollario 3° (Proprietà associativa). — *Se in una serie sommabile* (B, r) *si sostituisce a un numero finito* n *di termini la loro somma, si ha una serie sommabile* (B, $r-n+1$) *avente ugual somma.*

Corollario 4° (Proprietà dissociativa). — *Se in una serie sommabile* (B, r) *si sostituisce un termine con* n *altri* (n *finito*) *dei quali esso sia la somma, si ha una serie sommabile* (B, $r+n-1$) *avente ugual somma.*

V. *Se le due serie*

$$u_0+u_1+u_2+\cdots \quad , \quad v_0+v_1+v_2+\cdots$$

sono sommabili (B, r) *e* (B, s) *ed hanno per somma* u *e* v *rispettivamente, la serie di Cauchy*

$$w_0+w_1+w_2+\cdots,$$

ove

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 ,$$

è sommabile (B, t) *ed ha per somma* $w=uv$, *ove* t *vale* $r+s-1$ *se* r *ed* s *non sono positivi, ed è uguale al non maggiore dei numeri* r *ed* s *in ogni altro caso.*

Tutti questi teoremi ci assicurano che, applicando a serie sommabili Bg le operazioni lecite sulle serie assolutamente convergenti, si hanno ancora serie sommabili Bg [1].

4. Il metodo Bg è, in certo senso, il metodo limite dei (B, r) per $r=-\infty$.

È naturale considerare anche il metodo limite dei (B, r) per $r=+\infty$,

[1] È solo vietato di applicare la proprietà commutativa *al di là di qualunque posto.*

che indicheremo con B*t*: una serie è *sommabile* B*t* quando è sommabile con uno dei metodi (4) e con tutti i seguenti [1].

Risulta facilmente dai teoremi del n. 3 che, applicando a serie sommabili B*t* le operazioni lecite sulle serie assolutamente convergenti, si hanno ancora serie sommabili B*t*; dunque: *anche il metodo* B*t* *ammette l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti.*

Il metodo B*t* è meno potente di ciascuno dei metodi (4) evidentemente, e quindi è molto meno potente del metodo B*g*; tuttavia esso riesce a sommare tutte le serie convergenti e le serie *assolutamente sommabili* del Borel. Ciò mette ancor meglio in evidenza la grande potenza del metodo B*g*.

Fisica terrestre. — *Singolare precipitazione acquea osservata al Vesuvio.* Nota di C. Chistoni ed A. Malladra, presentata dal Corrisp. Michele Cantone.

Il giorno 26 aprile 1917 si discendeva dall'orlo del cratere vesuviano, ed arrivati al Caposaldo n. 23 della « Linea di livellazione geometrica di precisione Resina-Cratere » eseguita nel 1913 dall'Istituto Geografico Militare (m. 1134,75 sul mare) che sta infisso sulla Stazione superiore della Funicolare Cook [2] alle ore $11^h 32^m$ del Meridiano a 15° E da Greenwich, siamo stati sorpresi dalla neve, mentre pochi minuti prima splendeva il sole. Il vento soffiava moderatamente da NW e su di noi non mancava la nube di nebbia e di fumo proveniente dal cratere del Vesuvio.

Raccolta la neve su di una stoffa di lana molto pelosa (*loden*) ed esaminate le varie parti con una lente di ingrandimento, trovammo che la precipitazione era costituita da classiche stelle di neve esagonali, semplici e trasparenti; da nevischio assai piccolo (meno di un millimetro di diametro), e da corpuscoli di ghiaccio, faccettati ed angolosi, che non corrispondevano alla pioggia gelata, la quale, come è noto, assume forma sferica o pressochè sferica. Le dimensioni massime di questi corpuscoli, che avevano l'apparenza di particelle di ghiaccio infranto, erano da un quarto a mezzo millimetro.

La caduta contemporanea di queste tre forme di acqua solida è un fenomeno singolare, che va notato e che per noi torna nuovo; come nuova ci torna la caduta di minuzzoli di ghiaccio trasparenti dal cielo.

[1] E quindi (pel secondo teorema del n. 2) anche con tutti i precedenti. Perciò una tal serie l'abbiamo chiamata *totalmente sommabile* nella seconda Nota citata più innanzi.

[2] *R. Comm. Geod. Italiana. Livellazione geometrica di precisione Isola d'Ischia e Vesuvio* (Firenze, tipografia Barbèra, 1914). A. Malladra, *Sulle modificazioni del Vesuvio dopo il 1906 e la livellazione geometrica del vulcano* (Boll. della R. Società geogr. Italiana, dicembre, 1914).