ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *I moti relativi nel calcolo assoluto.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Si è più volte accennato (¹) alla possibilità ed opportunità di non far uso in meccanica di moti relativi [cfr. a)-i)] che richiedono sempre elementi estranei alla questione che si studia; ad es. negli ingranaggi [cfr. c)] portano alla considerazione di moti inesistenti. Due questioni non erano ancora state trattate esplicitamente ed intendo svilupparle in questa Nota. Una si riferisce alla pseudo-derivata rispetto ad assi mobili, concetto e notazione assai infelice; l'altra al luogo fisso e mobile degli assi di istantanea rotazione nel moto di un corpo rigido.

Forma assoluta del moto relativo.

In uno spazio geometrico S, fisso ed illimitato, tutti i punti sono animati da un moto ν, cioè ogni punto di S è in ogni tempo t posizione di punti in moto nello spazio stesso. In certi casi è opportuno considerare un osservatore del moto ν, non fisso in S ma animato da un moto di corpo rigido $\mu = \left(\begin{matrix} O_1 \\ O \end{matrix}, \lambda\right)$ ove O è punto fisso, O_1 punto e λ isomeria vettoriale ad invariante terzo positivo [cfr. g)] funzioni di t. Il moto μ può essere, o pur no, indipendente da ν. L'osservatore, in tali condizioni, vede in moto qualsiasi punto P fisso di S (moto relativo) e nel tempo t lo vede nella posizione μP. Così è stabilito il moto relativo all'osservatore senza bisogno di assi fissi e mobili. Tanto per dare un esempio si può stabilire quand'è che « il moto ν si dice *stazionario* rispetto al moto μ dell'osservatore ». Nel tempo t, passano per P e μP due punti che nel moto ν hanno le velocità $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1$; si dice che ν è stazionario rispetto a μ, quando essendo $\mathbf{a}$ vettore arbitrario, si ha $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{v}_1 \times \lambda \mathbf{a}$, cioè $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathrm{K}\lambda\mathbf{v}_1 \times \mathbf{a}$, che per l'arbitrarietà di a dà $\mathbf{v} = \mathrm{K}\lambda\mathbf{v}_1$, cioè $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}$; e questa è, sotto la sua forma più semplice, la condizione di stazionarietà.

(¹) Citeremo i lavori seguenti.

C. Burali-Forti et R. Marcolongo: *a*) *Eléments de calcul vectoriel* (Hermann, Paris). — *b*) *Analyse vectorielle générale* (Mattei, Pavia).

C. Burali-Forti: *c*) *Ingranaggi piani* (Atti Acc. Torino, vol. 37). — *d*) *Sul moto di un corpo rigido* (id., vol. 38). — *e*) *Sul moto composto* (id., vol. 47). — *f*) *Sulle derivate delle isomerie vettoriali* (Rend. Lincei, vol. XXV. serie 5ª; nella formula [1] a pag. 712 dopo il simbolo $\wedge$ manca λ; si deve scrivere $\lambda' = \Omega \wedge \lambda$). — *g*) *Isomerie vettoriali e moti geometrici* (Mem. Acc. Torino, s. II, vol. 65). — *h*) *Corso di Geometria analitico-proiettiva* (G. B. Petrini, Torino).

A. Pensa: *i*) *Sopra alcune proprietà del moto di un corpo rigido* (Rendic. Palermo, T. XXXVI).

È noto [cfr. a), f), g)] che il moto μ determina il vettore Ω funzione di t che dà la rotazione istantanea e tale anche che [cfr. f)]

$$d\lambda = \Omega \wedge \lambda\, dt \quad , \quad d\mathrm{K}\lambda = -(\mathrm{K}\lambda\Omega) \wedge \mathrm{K}\lambda\, dt .$$

Ciò posto, ed essendo $\mathbf{u}$ un qualsiasi vettore funzione di t, si ha

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \lambda \frac{d(\mathrm{K}\lambda\mathbf{u})}{dt} + \Omega \wedge \mathbf{u} . \tag{1}$$

Infatti per le formule ora citate, e ricordando che

$$\mathrm{R}\lambda = \lambda \ , \ (\lambda\mathbf{a}) \wedge (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \ , \ (\lambda\mathbf{a}) \times (\lambda\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} ,$$

si ha

$$d(\mathrm{K}\lambda\mathbf{u}) = (d\mathrm{K}\lambda)\,\mathbf{u} + \mathrm{K}\lambda\, d\mathbf{u} = -(\mathrm{K}\lambda\Omega) \wedge \mathrm{K}\lambda\mathbf{u}\, dt + \mathrm{K}\lambda\, d\mathbf{u} =$$
$$= \mathrm{K}\lambda \{ -\Omega \wedge \mathbf{u}\, dt + d\mathbf{u} \} ,$$

dalla quale operando con λ nei due membri ($\lambda . \mathrm{K}\lambda = 1$) e dividendo per dt si ha la (1).

Se P è un punto funzione di t, dalla identità $P = O_1 + (P - O_1)$ e dalla (1) si ha subito

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dO_1}{dt} + \lambda \frac{d\{\mathrm{K}\lambda(P - O_1)\}}{dt} + \Omega \wedge (P - O_1) . \tag{2}$$

Il primo termine del secondo membro della (1) è il vettore che di solito si chiama « derivata di $\mathbf{u}$ rispetto agli assi mobili » e si indica con la notazione $d'\mathbf{u}/dt$, cioè si pone

$$\frac{d'\mathbf{u}}{dt} = \lambda \frac{d(\mathrm{K}\lambda\mathbf{u})}{dt} \tag{a}$$

e siccome il secondo membro *non* è una derivata, tanto basta per non accettare denominazione e notazione usuale. L'origine cartesiana di tale denominazione e notazione è questa. Essendo $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ la solita terna ortogonale parallela agli assi fissi, gli assi mobili collegati con l'osservatore sono paralleli ai vettori $\lambda\mathbf{i}, \lambda\mathbf{j}, \lambda\mathbf{k}$; posto $\mathbf{u} = x\lambda\mathbf{i} + y\lambda\mathbf{j} + z\lambda\mathbf{k}$, il vettore ($a$) è

$$\frac{dx}{dt}\lambda\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\lambda\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\lambda\mathbf{k}$$

che facilmente si pone sotto la forma del secondo membro della (a). Risulta ancora una volta [cfr. a), vol. I e II] come le coordinate cartesiane possano dare facilmente origine a degli pseudo-enti e pseudo-operatori.

Giova osservare, sebbene ciò abbia relazione soltanto indiretta con i moti relativi ordinari, che se $\mathbf{u}$ e λ sono funzioni, non di t, ma di un punto P variabile in un campo (continuo, ecc.) a tre dimensioni, si ha una formula analoga alla (1),

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} = \lambda \frac{d(\mathrm{K}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{u})}{d\mathrm{P}} - \mathbf{u} \wedge \mu \tag{3}$$

ove μ è l'omografia funzione di P [cfr. f) per la quale si ha $d\boldsymbol{\lambda} = (\mu dP) \wedge \lambda$. Si ha infatti [cfr. f), pag. 714]

$$\frac{d(\mathrm{K}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{u})}{dP}\mathbf{x} = \mathrm{K}\lambda \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{x} - (\mathrm{K}\lambda \,.\, \mu\mathbf{x}) \wedge \mathrm{K}\,\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{u}$$

$$= \mathrm{K}\lambda \left\{ \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{x} + \mathbf{u} \wedge (\mu\mathbf{x}) \right\}.$$

MOTO DI CORPO RIGIDO.

Si consideri un corpo rigido in moto e sia P, funzione di t, il suo punto generico nel tempo t, posizione del punto P_0 del corpo all'inizio del moto, cioè nel tempo t_0. Indicheremo con gli apici le derivate rispetto a t.

Il moto del corpo rigido è individuato da una formazione geometrica di seconda specie [cfr. h), d), i)]

$$s = \boldsymbol{\varphi} \,.\, O\mathbf{u} + m|\mathbf{u} \tag{1}$$

ove $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{m}$ sono numeri reali, O è un punto, $\mathbf{u}$ un vettore unitario, funzioni tutti di t, senza che la linea descritta da O sia necessariamente una traiettoria di un punto del corpo rigido, come pure $\mathbf{u}$ non sia necessariamente invariabilmente collegato col corpo rigido. La retta $O\mathbf{u}$ è l'asse istantaneo di Mozzi nel tempo t, φdt, mdt dànno le grandezze della rotazione e traslazione istantanea nel tempo t.

La velocità P' nel tempo t è data da [cfr. c), i)]

$$P' = |(Ps \,.\, \omega) = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{u} \wedge (P - O) + m\mathbf{u} \text{ [1]} \tag{2}$$

dalla quale si ricava la formula usuale

$$P' - Q' = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{u} \wedge (P - Q) \tag{3}$$

nella quale non comparisce la traslazione m.

Si può partire dalla (3) per stabilire il moto del corpo rigido [cfr. a), f)] e allora m è dato da $P' \times \mathbf{u}$ che è indipendente dallo speciale punto P

[1] Si noti che un punto P del corpo rigido può stare, in ogni tempo t, nell'asse di Mozzi, la retta $O\mathbf{u}$, solamente quando $P = O + x\mathbf{u}$ e quindi $P' = m\mathbf{u}$. La rigata descritta da $O\mathbf{u}$ è quindi sviluppabile e P ne deve descrivere lo spigolo di regresso. È importante tener conto che il punto O funzione di t (generico sulla retta $O\mathbf{u}$) non descrive in generale una traiettoria di un punto del corpo.

del corpo, e un punto dell'asse di Mozzi è $P + 1/\varphi\, \mathbf{u} \wedge P'$ proiezione ortogonale di P sull'asse e per il quale passa, nel tempe t, un punto del corpo rigido con la velocità $m\mathbf{u}$ [cfr. a)].

Esiste la isomeria vettoriale, un *Rotor* [cfr. g)], λ tale che per P, Q punti arbitrarî del corpo rigido

$$P - Q = \lambda(P_0 - Q_0) \tag{4}$$

e per tale isomeria si ha [cfr. f)]

$$\lambda' = \varphi\mathbf{u} \wedge \lambda \quad , \quad \mathrm{K}\lambda' = -\varphi(\mathrm{K}\lambda\mathbf{u}) \wedge \mathrm{K}\lambda . \tag{5}$$

La retta $O\mathbf{u}$ descrive, col variare di t, una rigata $\boldsymbol{\Sigma}$ *luogo immobile degli assi di istantanea rotazione.* Il punto H e il vettore unitario $\mathbf{v}$, funzioni di t_0 e di t, invariabilmente collegati col corpo rigido, siano tali che nel tempo t divengano rispettivamente O, $\mathbf{u}$, cioè si abbia

$$P - O = \lambda(P_0 - H) \quad , \quad \mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} ,$$

ovvero, il che equivale,

$$H = P_0 - \mathrm{K}\lambda(P - O) \quad , \quad \mathbf{v} = \mathrm{K}\lambda\mathbf{u} . \tag{6}$$

La retta $H\mathbf{v}$ descrive, col variare di t, una rigata $\boldsymbol{\Sigma}_1$ che è il *luogo mobile degli assi di istantanea rotazione*. Durante il moto le generatrici $H\mathbf{v}$ di $\boldsymbol{\Sigma}_1$ vengono a disporsi nelle corrispondenti generatrici $O\mathbf{u}$ di $\boldsymbol{\Sigma}$ e H si dispone in O.

Per le derivate, rispetto a t, di H e $\mathbf{v}$ si ha

$$H' = \mathrm{K}\lambda(O' - m\mathbf{u}) \qquad \mathbf{v}' = \mathrm{K}\lambda\mathbf{u}' \tag{7}$$

e in conseguenza

$$\lambda(H' \wedge \mathbf{v}) = O' \wedge \mathbf{u} \quad , \quad \lambda(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} . \tag{8}$$

Ciò si dimostra facilmente. Derivando la prima delle (6) e tenendo conto delle (5) si ha

$$H' = -\mathrm{K}\lambda'(P - O) - \mathrm{K}\lambda(P' - O') = \mathrm{K}\lambda\,\{\varphi\mathbf{u} \wedge (P - O) - P' + O'\}$$

che per la (2) dà la prima delle (7). Derivando la seconda delle (6) si ha

$$\mathbf{v}' = \mathrm{K}\lambda'\mathbf{u} + \mathrm{K}\lambda\mathbf{u}' = -\varphi(\mathrm{K}\lambda\mathbf{u}) \wedge \mathrm{K}\lambda\mathbf{u} + \mathrm{K}\lambda\mathbf{u}'$$

che dà la seconda delle (7). Dalle (7) si ha, per la seconda (6),

$$H' \wedge \mathbf{v} = \mathrm{K}\lambda\,\{(O' - m\mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}\} \quad , \quad \mathbf{v}' \wedge \mathbf{v} = \mathrm{K}\lambda(\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u})$$

ed operando con λ nei due membri si hanno le (8) (1).

(1) Si tenga presenta che: $\lambda \,.\, \mathrm{K}\lambda = \mathrm{K}\lambda \,.\, \lambda = 1$, $\mathrm{R}\lambda = \lambda$, $(\lambda\mathbf{a}) \wedge \lambda\mathbf{b} = \mathrm{R}\lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$, $(\lambda\mathbf{a}) \times (\lambda\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Da queste formule semplicissime derivano le proprietà del rotolamento di Σ_1 in Σ che dà il moto del corpo rigido come ora esponiamo.

Nei punti H, O di Σ_1, Σ, i piani tangenti sono normali [cfr. h)] ai vettori $H' \wedge \mathbf{v}$, $O' \wedge \mathbf{u}$ e gli elementi di area in tali punti hanno per rapporto il rapporto dei moduli dei due vettori. Osservando che per a costante arbitraria il punto $H + a\mathbf{v}$ va in $O + a\mathbf{u}$ e che la prima delle (8) vale sostituendo ad H ed O questi punti, dalla prima delle (8) risulta subito, come è noto, che: durante il moto la Σ_1 ha moto di sviluppo in Σ, cioè in qualunque posizione i piani tangenti a Σ_1 nei punti di $H\mathbf{v}$ vengono a coincidere coi piani tangenti a Σ nei punti corrispondenti di $O\mathbf{u}$ e gli elementi corrispondenti di aree sono eguali.

I punti della linea H vengono, durante il moto, nei punti della linea O, ma essendo $\lambda H' = O' - m\mathbf{u}$ la tangente in H si dispone nella tangente in O solamente quando $mO' \wedge \mathbf{u} = 0$, cioè $m = 0$, oppure, essendo $O' \neq 0$, O' è parallelo ad $\mathbf{u}$ nel qual caso Σ è una sviluppabile (non cono) aventi la linea O come spigolo di regresso. Gli archi delle due linee non sono, in generale, eguali, perchè dalla prima delle (7) si ha

$$H'^2 = O'^2 + m^2 - 2\,m\,O' \times \mathbf{u}$$

che dà archi eguali solo per $m = 0$ ovvero $m = 2\,O' \times \mathbf{u}$.

Ricordando che $\mathbf{u} \times \mathbf{u}' = 0$, perchè $\mathbf{u}$ è unitario, si ha dalle (7)

$$H' \times \mathbf{v}' = (O' - m\mathbf{u}) \times \mathbf{u}' = O' \times \mathbf{u}' ;$$

e poichè $O' \times \mathbf{u}' = 0$ esprime [cfr. h)] che O descrive la *linea di stringimento* di Σ si ha: la linea (H) di stringimento di Σ_1 viene a collocarsi, punto a punto, nella linea di stringimento di Σ.

Nello stesso modo si ha

$$H' \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}' = O' \times \mathbf{u} \wedge \mathbf{u}' \quad , \quad H' \wedge \mathbf{v} = O' \wedge \mathbf{u},$$

e poichè $O' \times \mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0$ dice che Σ è sviluppabile e $O' \wedge \mathbf{u} = 0$ che O descrive lo spigolo di regresso di Σ, risulta subito che: Σ_1 e Σ sono sviluppabili insieme e lo spigolo di regresso di Σ_1 viene a collocarsi, punto a punto, nello spigolo di regresso di Σ [1].

[1] Comunque sia scelto O, il punto R di $O\mathbf{u}$ che descrive la linea di stringimento o lo spigolo di regresso di Σ è dato da [cfr. h)]

$$R = O - \{ (O' \times \mathbf{u}')/(\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u})^2 \}\, \mathbf{u} ;$$

il corrispondente punto in $H\mathbf{v}$ è dunque, per le formule note,

$$H - \{ (O' \times \mathbf{u}')/(\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u})^2 \}\, \mathbf{v} .$$

Se Σ è un *cono* si può supporre O suo vertice, cioè $O' = 0$. Si ha allora dalla prima delle (7) $H' = -m\mathbf{v}$ e quindi Σ_1 è sviluppabile essendone H lo spigolo di regresso; in particolare un cono di vertice H (coincidente con O perchè ciò avviene nel tempo t_0) solamente quando $m = 0$.

Se Σ è un cilindro, cioè $\mathbf{u} =$ cost, ovvero $\mathbf{u}' = 0$, allora per la seconda delle (7) si ha pure $\mathbf{v} =$ cost, cioè Σ_1 è pure un cilindro. Se O descrive una sezione retta del cilindro Σ, cioè $O' \times \mathbf{u} = 0$, allora avendosi in generale $H' \times \mathbf{v} = O' \times \mathbf{u} - m$, la linea H è sezione retta del cilindro Σ_1 solamente quando $m = 0$.

Si sono così ottenute, in modo semplicissimo, le leggi generali e particolari del rotolamento di Σ_1 in Σ senza far uso di moti relativi, senza, cioè, introdurre dei moti fittizi che nulla hanno a che fare col moto dato che, poichè è dato, deve bastare ampiamente da sè solo a dare tutte le proprietà del moto. Sono in sostanza le isomerie vettoriali che eliminano nello spazio i moti relativi come nel piano [cfr. *a*), moto rigido piano] eliminano, sotto forma già nota, gli stessi moti. Si può esser certi che una volta eliminati *sistematicamente* i moti relativi in *tutta* la Meccanica, questa assumerà forma assai più semplice e chiara; si intende introdotti gli elementi assoluti ed eliminate le inutili coordinate.

Patologia vegetale. — *Intorno ad una gommosi specifica dell'albicocco.* Nota del prof. Vittorio Peglion, presentata dal Socio Cuboni.

Di forme fungine gummigene se ne conoscono ormai parecchie: cronologicamente elencate figura in prima linea il *Clasterosporium carpophilum*, quindi le forme conidiali di alcune *Sclerotinia*, un micelio sterile isolato dal Maimone [1] dalla gomma di limone, la *Pythiacystis citrophthora*, agente specifico della forma di gommosi prevalente negli agrumeti della California secondo il Fawcett [2], riscontrata successivamente in altre gommosi degli alberi da frutto: allorquando codesti parassiti riescono a penetrare di primavera nei tessuti corticali dei rami delle rispettive piante ospiti (agrumi e drupacee) e concorrano speciali condizioni di ambiente e precisamente largo afflusso acqueo per pioggia od irrigazione, le lesioni cagionate dal micelio diventano sede di così cospicuo processo gommoso da trarre in inganno chi osservi superficialmente il fenomeno.

Tale è una forma di gommosi che minaccia seriamente la coltivazione dell'albicocco nella regione emiliana: si tratta della stessa malattia ram-

(1) Maimone B., Annali Scuola Agr. Portici 1911.

(2) Fawcett H. S., Calif. St. Hortic. Monthl. Bull. 1913 — ed in Phytopathology — Feb. 1915.