ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Fisica matematica. — *Sulla teoria dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici* (1). Nota I del Corrisp. O. Tedone.

I. — Introduzione.

1. Prenderemo come punto di partenza la teoria elettromagnetica dei fenomeni luminosi. Quello che, però, diremo mirando ai fenomeni luminosi, potrà anche estendersi, facilmente, ad ogni campo elettromagnetico esistente nel mezzo cristallino, purchè questo mezzo si conservi uniassico anche per gli ultimi fenomeni. E ricordiamo che un mezzo cristallino perfettamente dielettrico al quale caso, nelle considerazioni che seguono, vogliamo limitarci, rispetto al complesso dei fenomeni elettromagnetici, è individuato dalla espressione dell'energia elettromagnetica elementare, allo stesso modo, p. es., con cui lo stesso mezzo cristallino è individuato dall'espressione del potenziale elastico elementare rispetto ai fenomeni elastici. Che, inoltre, si assume per espressione dell'energia elettromagnetica elementare la somma di una funzione omogenea di secondo grado delle componenti della forza elettrica (energia elettrica) e di una analoga funzione delle componenti della forza magnetica (energia magnetica). E che, infine, alla parte che rappresenta la energia magnetica, si suole assegnare la stessa forma isotropa che ad essa conviene nel vuoto, o nell'aria, ipotesi sicuramente accettabile, almeno, nel campo dei fenomeni luminosi.

Adottando queste ipotesi ed indicando con X, Y, Z le componenti della forza elettrica, con U, V, W quelle della forza magnetica, con f l'espres-

(1) Le prime ricerche d'indole generale nella teoria dei fenomeni luminosi in un mezzo cristallino, pare, siano dovute a Lamé (*Leçons sur la théorie math. de l'élast.*... Paris, 1852) il quale parte dall'ipotesi che le vibrazioni luminose non sieno che vibrazioni elastiche di uno speciale corpo solido e che quindi esse debbano farsi dipendere dalle stesse equazioni delle vibrazioni di un corpo solido elastico. Basandosi sulle equazioni dell'ottica ch'egli, per questa via, costruisce, fa uno studio diffuso sulla possibilità e sulla determinazione di un unico centro luminoso. I risultati ottenuti da Lamé, in questo indirizzo, sono stati utilizzati, poi, dalla Kowalevsky (Acta math., vol. VI, pag. 249) nelle ricerche da lei fatte sulla integrazione col metodo di Weierstrass delle equazioni dell'ottica di Lamé già citate. Però i risultati ottenuti da Lamé e quelli ottenuti dalla Kowalevsky sono stati, poi, assoggettati a critica ed in gran parte contestati dal Volterra (Acta math., vol. XVI, pag. 153) le di cui considerazioni e procedimenti sono stati approfonditi dal Signorini in un ottimo lavoro (Ann. della S. N. S. di Pisa, vol. XII), nel caso particolare dei mezzi uniassici che il Volterra aveva determinatamente lasciato da parte. In esso si troveranno altre utili citazioni relative all'argomento. Si consulti anche il § IX delle *Lectures* tenute dal Volterra alla Clark University (pubbl. nel 1912).

sione dell'energia elettromagnetica elementare per unità di volume, assumendo come assi coordinati un sistemn di assi di simmetria elettrica, potremo scrivere

$$(1)\qquad f=\frac{1}{8\pi}(\varepsilon_1 X^2+\varepsilon_2 Y^2+\varepsilon_3 Z^2+U^2+V^2+W^2)\,.$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono le così dette costanti dielettriche principali e l'espressione (1) di f conviene a qualunque mezzo cristallino perfettamente dielettrico. Se le tre costanti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono eguali, il mezzo è isotropo, o come tale si comporta rispetto ai fenomeni elettromagnetici; se soltanto due di queste tre costanti sono eguali, i corrispondenti cristalli si dicono *uniassici*; in caso diverso *biassici*.

I fenomeni elettromagnetici, all'interno del cristallo, hanno le stesse simmetrie della funzione f; quindi, in ogni caso, un centro di simmetria e tre assi di simmetria binarii rispettivamente ortogonali. D'altra parte, un calcolo molto semplice dimostra che se l'asse z, p. es., è, per f, un asse di simmetria almeno ternario esso è anche un asse d'isotropia e, quindi, comunque si scelgano gli altri due assi x e y, f ha sempre la forma (1) con $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, e il mezzo cristallino è uniassico. Ricordiamo poi che le relazioni fra le simmetrie dei fenomeni elettromagnetici in un mezzo cristallino e le simmetrie della sua costituzione molecolare dipendono dalla nota legge di fisica cristallografica che « tutte le simmetrie di costituzione del mezzo cristallino devono rimanere tali per f, come, del resto, per ogni altro fenomeno fisico che possa riscontrarsi nell'interno del cristallo ». Ne viene subito che i sistemi cristallini in cui si riscontra un asse ternario, quaternario, o senario, sono al più uniassici e l'esperienza dimostra che tali sono effettivamente, a meno che non si tratti del sistema regolare nel qual caso il cristallo, rispetto ai fenomeni elettromagnetici, si comporta come isotropo.

2. La spinta alle presenti ricerche m'è venuta dalla constatazione del fatto che, combinando, in modo opportuno, i metodi d'integrazione da me adoperati in precedenti Note [1], si riesce ad integrare in modo completo anche le equazioni dell'ottica relative ai mezzi uniassici portando, quindi, così, la teoria generale dei fenomeni luminosi, per questi mezzi, allo stesso livello che l'indicata teoria ha raggiunto per i mezzi isotropi. Effettivamente, poi, le accennate equazioni s'integrano egualmente, basandosi sugli stessi metodi contenuti nelle citate Note, anche nel caso in cui l'energia magnetica non sia una funzione isotropa, purchè l'energia elettromagnetica elementare

[1] *Campi elettrom. dipendenti da una sola coordinata. Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell*, in Rend. della R. Acc. dei Lincei, sedute 19 dicembre 1915 e 16 aprile 1916. Colgo qui l'occasione, riparando ad una involontaria omissione, per aggiungere ai lavori citati nelle ultime Note: A. Tonolo, *Sull'integr. delle equaz. fondamentali dell'elettrodin.* Ann. di mat., tomo XVII.

totale continui ad avere un asse di isotropia. Le equazioni stesse s' integrerebbero anche se nel mezzo cristallino si debba tener conto, in certa misura, dei fenomeni di conduzione purchè l'asse d' isotropia della energia elettromagnetica elementare continui ad esser tale per gli ultimi fenomeni. Per non andare incontro a formole complicate, ci limiteremo, però, solo al caso in cui il mezzo è perfettamente dielettrico e la corrispondente energia elettromagnetica abbia la forma (1), ma supporremo che, nel mezzo, possano aver luogo correnti di convezione.

II. — Sistema di equazioni aggiunto e teorema di reciprocità.

3. Le equazioni che vogliamo assoggettare ai nostri studî si possono scrivere

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} &= c\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - 4\pi u, & \frac{\partial U}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \\ \varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t} &= c\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - 4\pi v, & \frac{\partial V}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right), \quad \text{con } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} &= c\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - 4\pi w, & \frac{\partial W}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

nelle quali la costante c è, al solito, la velocità della luce nel vuoto ed u, v, w sono funzioni note di x, y, z, t. Poichè, poi, le cose che diremo in questa parte del nostro lavoro sono indipendenti dall'ipotesi particolare di $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, noi le esporremo come se la detta ipotesi non sussista.

Qualunque sieno $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, al sistema di equazioni

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= c\left(\frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right), & \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= c\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x}\right), & \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} &= c\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right), & \varepsilon_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right), \end{aligned}\right.$$

daremo il nome di sistema *aggiunto* del sistema (2). Se ora $X, Y, \ldots, W$ soddisfano al sistema (2) e $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_3$ al sistema (3), si trova subito che vale l' identità

$$\frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon_1 X \psi_1 + \varepsilon_2 Y \psi_2 + \varepsilon_3 Z \psi_3 - (U\varphi_1 + V\varphi_2 + W\varphi_3)] =$$

$$= c\left\{\frac{\partial}{\partial x}(V\psi_3 - W\psi_2 + Y\varphi_3 - Z\varphi_2) + \cdots\right\} - 4\pi(u\psi_1 + v\psi_2 + w\psi_3)$$

in cui i puntini, nella parentesi a secondo membro, indicano la somma di due termini che si deducono da quello scritto, nella stessa parentesi, con permutazioni circolari. Introducendo, quindi, come al solito, nelle nostre considerazioni lo spazio lineare a quattro dimensioni in cui x, y, z, t sono le coordinate di un punto, e dinotando con σ_3 una varietà regolare, chiusa, a tre dimensioni di questo spazio, limitante una regione S_4 all'interno della quale $X, Y, \ldots, W$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_3$ ed u, v, w sono funzioni regolari, potremo scrivere la formola

$$(4)\qquad \int_{\sigma_3}[X\Psi_1 + Y\Psi_2 + Z\Psi_3 - (U\Phi_1 + V\Phi_2 + W\Phi_3)]\, d\sigma_3 - \\ - 4\pi \int_{S_4}(u\psi_1 + v\psi_2 + w\psi_3)\, dS_4 = 0$$

in cui

$$(5)\qquad \begin{cases} \Phi_1 = \varphi_1 \quad \cos nt + c(\psi_2 \cos nz - \psi_3 \cos ny), \\ \Psi_1 = \varepsilon_1 \psi_1 \cos nt - c(\varphi_2 \cos nz - \varphi_3 \cos ny), \end{cases}$$

n essendo la normale a σ_3 diretta verso l'interno di S_4, mentre Φ_2, Φ_3 e Ψ_2, Ψ_3 si deducono, rispettivamenta, da Φ_1 e Ψ_1 con permutazioni circolari di $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; x, y, z; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e ψ_1, ψ_2, ψ_3. Alla formola (4) daremo il nome di *teorema di reciprocità* relativo ai due sistemi di equazioni (2) e (3) e continueremo a dare alle espressioni $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Psi_3$ il nome di *funzioni associate* a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_3$.

III. — Determinazione di W e di Z.

4. Sia adesso $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ e chiamiamo, in questa parte del nostro lavoro, con ξ, η, ζ, τ le coordinate correnti di un punto del nostro spazio a quattro dimensioni; con x, y, z, t, invece, le coordinate di un punto fisso dello stesso spazio. Nella ipotesi fatta, W e Z, ossia le componenti della forza magnetica e della forza elettrica secondo l'asse d'isotropia, si determinano ancora con procedimento perfettamente analogo a quello con cui abbiamo determinato tutte e sei le componenti dei due detti vettori nel caso dell'isotropia completa. Per mettere in luce questo fatto e costruire, contemporaneamente, le formole che ci daranno le due quantità W e Z, cominciamo con l'osservare che si soddisfa alle equazioni (3) ponendo

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = -c\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\zeta\,\partial\xi}, \quad \varphi_2 = -c\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\eta\,\partial\zeta}, \quad \varphi_3 = c\left(\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\eta^2}\right) \\ \psi_1 = -\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\tau\,\partial\eta}, \quad \psi_2 = \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\tau\,\partial\xi}, \quad \psi_3 = 0 \end{cases}$$

Ω essendo una soluzione dell'equazione

$$C^2 \Delta^2 \Omega - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \tau^2} = 0 \quad , \quad C^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1} . \tag{7}$$

Introduciamo la varietà conica Γ, caratteristica rispetto alle nostre equazioni, col vertice nel punto (x, y, z, t) e di equazione

$$C^2 (t - \tau)^2 = r^2 = 0 \ , \ r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \ ;$$

fissiamo, quindi, nello spazio (ξ, η, ζ, τ), una varietà regolare a tre dimensioni, la quale sia incontrata in un punto solo da ogni parallela all'asse τ che l'incontra, potendo, però, questa retta, come caso limite, in tutto, o in parte, appartenere alla varietà stessa, e supponiamo che il punto (x, y, z, t) sia in tale posizione, rispetto alla varietà precedente, che nella regione S_4 limitata da Γ e dalla porzione σ_3 della stessa varietà a tre dimensioni sia

$$t > \tau \quad , \quad t - \tau > r .$$

Assumendo, allora, per Ω, l'espressione

$$\Omega = \frac{r}{C^2} \left[\frac{C(t-\tau)}{r} - 1 \right]^2 \tag{7'}$$

ed applicando, poi, il teorema di reciprocità alla soluzione generica $X, Y, \ldots, W$ delle (2) ed alla soluzione (6) delle (3) costruita con l'espressione (7′) di Ω, nella regione limitata da Γ, da σ_3 e dalla varietà γ di equazione $r = d$, d essendo una costante, basterà andare al limite, per $d = 0$, per dedurre dal teorema di reciprocità, nel modo ricordato, la prima delle formole richieste:

$$\begin{aligned} W(x, y, z, t) = & \left[W - \frac{2}{3} c \, \frac{X \cos n\eta - Y \cos n\xi}{\cos n\tau} \right]_0 - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(F_2 - \frac{1}{c} \int_{S_4} \frac{v}{r} dS_4 \right) + \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(F_1 - \frac{1}{c} \int_{S_4} \frac{u}{r} dS_4 \right) + \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \right\} . \end{aligned} \tag{8}$$

In questa formola è

$$\left\{ \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{4\pi c} \int_{\sigma_3} [\varepsilon_1 X \cos n\tau + c (V \cos n\zeta - W \cos n\eta)] \frac{d\sigma_3}{r} , \\ F_2 &= \frac{1}{4\pi c} \int_{\sigma_3} [\varepsilon_1 Y \cos n\tau + c (W \cos n\xi - U \cos n\zeta)] \frac{d\sigma_3}{r} ; \\ G_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_3} [U \cos n\tau - c (Y \cos n\zeta - Z \cos n\eta)] \frac{d\sigma_3}{r} , \end{aligned} \right. \tag{8'}$$

mentre G_2 e G_3 si deducono da G_1 con semplici permutazioni circolari; inoltre, t_0 è il valore di τ nel punto d'incontro della retta $r=0$ con σ_3 e le quantità con l'indice zero indicano i valori di queste stesse quantità nel detto punto.

5. Per determinare Z le considerazioni che servono a determinare W hanno bisogno di essere soltanto leggermente modificate. La formola (8) che da W coincide perfettamente con la corrispondente del caso dell'isotropia completa salvo a sostituire ε_1 al posto dell'unica costante dielettrica ε; la formola, invece, che andiamo a costruire per Z differirà dalla corrispondente del caso citato in modo più rilevante. Per costruire la formola indicata si osservi, dapprima, che si soddisfa ancora alle equazioni (3) ponendo

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_1 = \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau\, \partial \eta}, \quad \varphi_2 = -\frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau\, \partial \xi}, \quad \varphi_3 = 0, \\ &\psi_1 = -\frac{c}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \xi\, \partial \zeta}, \quad \psi_2 = -\frac{c}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \eta\, \partial \zeta}, \quad \psi_3 = \frac{c}{\varepsilon_3}\left(\frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \eta^2}\right) \end{aligned} \right.$$

purchè $\bar{\Omega}$ sia adesso soluzione dell'equazione

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau^2} = c^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \eta^2}\right) + \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \zeta^2} \right\}.$$

E prenderemo, per $\bar{\Omega}$, la funzione

$$(10') \quad \bar{\Omega} = \frac{\bar{r}}{c^2}\left[\frac{c(t-\tau)}{\bar{r}} - 1\right]^2, \quad \bar{r} = \sqrt{\varepsilon_3 [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] + \varepsilon_1 (z-\zeta)^2}.$$

Al posto della varietà Γ del caso precedente, si considererà ora la varietà $\bar{\Gamma}$ di equazione

$$(11) \qquad c^2 (t-\tau)^2 = \bar{r}^2$$

la quale è ancora una varietà conica col vertice nel punto (x, y, z, t), caratteristica per le nostre equazioni; ed al posto della varietà γ si considererà, analogamente, la varietà cilindrica $\bar{\gamma}$ di equazione

$$(12) \qquad \bar{r} = d$$

d essendo sempre una costante che, poi, faremo tendere a zero. Si osservi, quindi, che, scegliendo opportunamente il senso della normale sulle due falde di $\bar{\Gamma}$, è

$$\cos n\tau = -\frac{c}{K}, \quad \cos n\xi = -\frac{1}{K}\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}, \quad \cos n\eta = -\frac{1}{K}\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}, \quad \cos n\zeta = -\frac{1}{K}\frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}$$

con

$$K^2 = c^2 + \left(\frac{\partial \bar r}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar r}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar r}{\partial \zeta}\right)^2$$

per cui i valori delle funzioni associate alle funzioni (9) costruite col valore (10′) di $\bar{\Omega}$, sulla varietà $\bar{\Gamma}$, saranno dati dalle formole

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{K}{c}\Phi_1 = \left\{\bar r\left(c\frac{\partial}{\partial \bar r} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar\Omega}{\partial \bar r}\right) + 2\frac{c}{\bar r}\frac{\partial \bar\Omega}{\partial \bar r}\right\}\frac{\partial \bar r}{\partial \eta}, \\ \frac{K}{c}\Phi_2 = -\left\{\bar r\left(c\frac{\partial}{\partial \bar r} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar\Omega}{\partial \bar r}\right) + 2\frac{c}{\bar r}\frac{\partial \bar\Omega}{\partial \bar r}\right\}\frac{\partial \bar r}{\partial \xi}, \\ \Phi_3 = 0, \\ \frac{K}{c}\Psi_1 = \bar r\left(c\frac{\partial}{\partial \bar r} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar\Omega}{\partial \bar r}\right)\cdot\frac{\partial \bar r}{\partial \xi}\frac{\partial \bar r}{\partial \zeta}, \\ \frac{K}{c}\Psi_2 = \bar r\left(c\frac{\partial}{\partial \bar r} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar\Omega}{\partial \bar r}\right)\cdot\frac{\partial \bar r}{\partial \eta}\frac{\partial \bar r}{\partial \zeta}, \\ \frac{K}{c}\Psi_3 = -\bar r\left(c\frac{\partial}{\partial \bar r} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar\Omega}{\partial \bar r}\right)\cdot\left[\left(\frac{\partial \bar r}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar r}{\partial \eta}\right)^2\right] - 2\frac{c\varepsilon_3}{\bar r}\frac{\partial \bar\Omega}{\partial \bar r}. \end{cases}$$

E, poichè, come si verifica, immediatamente, l'operazione $c\frac{\partial}{\partial \bar r} - \frac{\partial}{\partial \tau}$ è una operazione di derivata in una direzione normale ad n e, quindi, appartenente a $\bar\Gamma$, le funzioni $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Psi_3$ si annullano tutte su $\bar\Gamma$.

Notiamo pure che, scegliendo il senso positivo della normale a $\bar\gamma$ in modo che penetri nella regione in cui $\bar r$ cresce e s'intenda che sia

$$k = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar r}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar r}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar r}{\partial \zeta}\right)^2},$$

su $\bar\gamma$, è

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{k}{c}\Phi_1 = -\frac{c}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r}\left(\bar r\frac{\partial \bar\Omega}{\partial \bar r}\right)\frac{\partial \bar r}{\partial \eta}, \quad \frac{k}{c}\Phi_2 = \frac{c}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r}\left(\bar r\frac{\partial \bar\Omega}{\partial \bar r}\right)\frac{\partial \bar r}{\partial \xi}, \quad \Phi_3 = 0 \\ \frac{k}{c}\Psi_1 = \frac{\partial^2 \bar\Omega}{\partial \tau\,\partial \bar r}\frac{\partial \bar r}{\partial \xi}\frac{\partial \bar r}{\partial \zeta}, \quad \frac{k}{c}\Psi_2 = \frac{\partial^2 \bar\Omega}{\partial \tau\,\partial \bar r}\frac{\partial \bar r}{\partial \eta}\frac{\partial \bar r}{\partial \zeta}, \\ \qquad\qquad \frac{k}{c}\Psi_3 = -\frac{\partial^2 \bar\Omega}{\partial \tau\,\partial \bar r}\left[\left(\frac{\partial \bar r}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar r}{\partial \eta}\right)^2\right] \end{cases}$$

nelle quali formole è da porsi $\bar r = d$.

Ciò posto, chiamiamo $\bar\sigma_3$ la porzione della varietà a tre dimensioni a cui appartiene σ_3, compresa in $\bar\Gamma$, ed $\bar S_4$ la regione dello spazio a quattro dimensioni solito limitata da $\bar{\sigma}_3$ e da $\bar{\Gamma}$; e indichiamo con $\bar{\sigma}_3'$ ed $\bar{S}_4'$ le porzioni di $\bar{\sigma}_3$ ed $\bar{S}_4$ esterne a $\bar{\gamma}$. Applichiamo, quindi, il teorema di reciprocità (4), nella regione $\bar{S}_4'$, alla stessa soluzione generica di prima $(X, Y, \dots, W)$ delle equazioni (2) ed alla soluzione (9) delle equazioni (3) costruita con la funzione $\bar{\Omega}$ data dalla (10'). Tenendo conto, allora, che l'elemento $d\bar{\gamma}$ della varietà $\bar{\gamma}$ è dato dalla formola

$$d\bar{\gamma} = \frac{d^2}{\varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1}}\, k\, d\omega\, d\tau$$

in cui $d\omega$ dinota l'elemento della superficie sferica ordinaria di raggio uno, e che

$$\int_\omega \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}\right)^2 d\omega = \frac{4\pi}{3}\varepsilon_3 , \dots , \int_\omega \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}\, d\omega = 0 , \dots ,$$

basta andare al limite, per $d = 0$, per trovare subito la formola

$$\frac{8\pi c}{\sqrt{\varepsilon_1}} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)\, Z(x, y, z, \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{4\pi c}{3\sqrt{\varepsilon_1}} \left[(t-t_0)^2 Z_0 - \frac{4\pi}{\varepsilon_3} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^2\, w(x, y, z, \tau)\, d\tau \right] +$$

$$+ \lim_{d=0} \left\{ \int_{\bar{\sigma}_3'} [X\Psi_1 + Y\Psi_2 + Z\Psi_3 - (U\Phi_1 + V\Phi_2 + W\Phi_3)]\, d\bar{\sigma}_3 - \right.$$

$$\left. - 4\pi \int_{\bar{S}_4'} (u\psi_1 + v\psi_2 + w\psi_3)\, d\bar{S}_4 \right\}$$

in cui, naturalmente, le $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Psi_3$ sono le funzioni associate della soluzione particolare adoperata.

Da questa formola si eliminano gli integrali improprii, portando dei segni di derivazione fuori dei segni integrali, col metodo indicato nella seconda delle Note citate, e si trova, derivando, ancora, due volte rispetto a t e dividendo poi per 8π,

$$(15) \quad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} Z(x, y, z, t) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left[Z_0 - \frac{4\pi}{\varepsilon_3} \int_{t_0}^{t} w(x, y, z, \tau)\, d\tau \right] +$$

$$+ \frac{2c^2}{3\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1}} \left(\frac{U \cos n\eta - V \cos n\xi}{\cos n\tau} \right)_0$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \bar{G}_2}{\partial t} - c \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{F}_1 - \int_{\bar{S}_4} \frac{u}{\bar{r}}\, d\bar{S}_4 \right) - \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{F}_3 - \int_{\bar{S}_4} \frac{w}{\bar{r}}\, d\bar{S}_4 \right) \right] \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \bar{G}_1}{\partial t} - c \left[\frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{F}_3 - \int_{\bar{S}_4} \frac{w}{\bar{r}}\, d\bar{S}_4 \right) - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{F}_2 - \int_{\bar{S}_4} \frac{v}{\bar{r}}\, d\bar{S}_4 \right) \right] \right\}$$

in cui

$$(15')\qquad \begin{cases} \bar{F}_1 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\bar{\sigma}_3} [\varepsilon_1 X \cos n\tau + c(V \cos n\zeta - W \cos n\eta)] \dfrac{d\bar{\sigma}_3}{\bar{r}}, \dots \\ \bar{G}_1 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\bar{\sigma}_3} [U \cos n\tau - c(Y \cos n\zeta - Z \cos n\eta)] \dfrac{d\bar{\sigma}_3}{\bar{r}}, \dots \end{cases}$$

IV. — Determinazione delle altre due coppie di quantità X, V e Y, U.

6. Determinate W e Z, possiamo determinare la coppia di funzioni **X**, **V** dalle due equazioni

$$(16)\qquad \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} + c\frac{\partial V}{\partial z} = c\frac{\partial W}{\partial y} - 4\pi u \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial t} + c\frac{\partial X}{\partial z} = c\frac{\partial Z}{\partial x}$$

e la coppia di funzioni Y, U dalle altre due

$$(16')\qquad \varepsilon_1 \frac{\partial Y}{\partial t} - c\frac{\partial U}{\partial z} = -c\frac{\partial W}{\partial x} - 4\pi v \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial t} - c\frac{\partial Y}{\partial z} = -c\frac{\partial Z}{\partial y}.$$

I due sistemi di equazioni (16) e (16′), astrazion fatta dal nome delle incognite e dai diversi valori dei termini noti, non sono sostanzialmente differenti e possiamo trattarli contemporaneamente introducendo un doppio segno.

Prenderemo, dunque, a studiare il sistema di equazioni

$$(17)\qquad \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} \pm c\frac{\partial V}{\partial z} = M \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial t} \pm c\frac{\partial X}{\partial z} = N$$

in cui indichiamo con M e N i termini noti, il quale, del resto, salvo l'introduzione dei termini noti ai secondi membri, non è che un caso particolare di quello studiato nella prima delle Note citate. Per ottenerne la integrazione, cominciamo col notare che, a e b essendo due costanti qualunque,

$$(18)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_1 X a + V b) \pm c\frac{\partial}{\partial z}(X b + V a) = M a + N b.$$

Consideriamo, quindi, nelle nostre equazioni, x e y come due parametri costanti e pensiamo, invece, t e z come le coordinate di un punto in un piano. Se supponiamo di aver scelti gli assi coordinati z e t in modo che l'asse z vada a coincidere con l'asse t dopo una rotazione positiva di $\frac{\pi}{2}$; chiamiamo s un contorno chiuso, ordinariamente regolare, di questo piano, e σ l'area racchiusa dal contorno s, all'interno della quale le funzioni che compaiono nella (18) siano regolari; otteniamo subito, dalla (18),

$$(19)\qquad \int_s \{(\varepsilon_1 X a + V b)\, dz \mp c(X b + V a)\, dt\} + \int_\sigma (M a + N b)\, d\sigma = 0$$

in cui il contorno s si deve intendere percorso nel solito modo.

7. Per opportunità di notazioni, converrà indicare, ora, con τ e ζ le coordinate di un punto corrente del nostro piano, e serbare i simboli t e z per indicare le coordinate di un determinato punto fisso del piano stesso. E, nel caso che sia necessario, o conveniente, ricordare, contemporaneamente, le coordinate τ e ζ che compaiono come variabili d'integrazione nelle espressioni di W e di Z, avanti costruite, si potranno introdurre, per queste ultime variabili, dei nuovi simboli. Ciò posto, chiamiamo, adesso, σ la regione del piano $\tau\zeta$ limitata dalle due rette

$$C(t-\tau)-(z-\zeta)=0 \quad , \quad C(t-\tau)+(z-\zeta)=0$$

essendo sempre $C=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}$, uscenti dal punto $(t\,.\,z)$, e da una linea s aperta e ordinariamente regolare. Ci limiteremo a considerare il solo caso in cui σ sia attraversata dalla retta $\zeta=z$ e supporremo che s sia, al solito, incontrata in un punto solo da ogni retta $z=\text{cost}$ che l'incontri a meno che una parte di s stessa non appartenga a questa retta. Chiamiamo σ_{I} quella delle due parti in cui σ è divisa dalla retta $\zeta=z$ che è adiacente alla retta $C(t-\tau)-(z-\zeta)=0$, σ_{II} l'altra parte; ed indichiamo, inoltre, con P, Q, R i punti d'incontro di s con le rette $C(t-\tau)-(z-\zeta)=0$, $\zeta=z$, $C(t-\tau)+(z-\zeta)=0$, successivamente. A questo punto applichiamo la (19) ad una soluzione generica e regolare delle (17), una volta nella regione σ_{I} dopo aver fatto $a=\pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$, $b=1$, il doppio segno, per a, corrispondendo al doppio segno nelle (17); un'altra volta in σ_{II} dopo aver fatto $a=\mp\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$, $b=1$. Troviamo così le due formole

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\int_{P}^{Q}(\pm\sqrt{\varepsilon_1}\,X+V)\,(d\zeta-C\,d\tau)-C\int_{T}^{t}(\pm\sqrt{\varepsilon_1}\,X+V)\,d\tau+\\
&\qquad\qquad+\int_{\sigma_{\text{I}}}(\pm M+N\sqrt{\varepsilon_1})\,\frac{d\sigma}{\sqrt{\varepsilon_1}}=0\,,\\
&\int_{Q}^{R}(\mp\sqrt{\varepsilon_1}\,X+V)\,(d\zeta+C\,d\tau)-C\int_{T}^{t}(\mp\sqrt{\varepsilon_1}\,X+V)\,d\tau+\\
&\qquad\qquad+\int_{\sigma_{\text{II}}}(\mp M+N\sqrt{\varepsilon_1})\,\frac{d\sigma}{\sqrt{\varepsilon_1}}=0\,,
\end{aligned}\right.$$

in cui T è il valore di τ corrispondente al punto Q e che, ordinariamente, è una funzione di x e y. Sommando e sottraendo le (20) e, quindi, derivando rispetto a t ricaviamo le altre formole

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \pm 2cX(z,t) = {} & \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_P^Q (\pm\sqrt{\varepsilon_1}X + V)(d\zeta - C\,d\tau) - \right. \\ & \left. - \int_Q^R (\mp\sqrt{\varepsilon_1}X + V)(d\zeta + C\,d\tau)\right\} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{\sigma_1}(\pm M + N\sqrt{\varepsilon_1})\,d\sigma - \int_{\sigma_{11}}(\mp M + N\sqrt{\varepsilon_1})\,d\sigma\right\}, \\ 2CV(z,t) = {} & \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_P^Q (\pm\sqrt{\varepsilon_1}X + V)(d\zeta - C\,d\tau) + \right. \\ & \left. + \int_Q^R (\mp\sqrt{\varepsilon_1}X + V)(d\zeta + C\,d\tau)\right\} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{\sigma_1}(\pm M + N\sqrt{\varepsilon_1})\,d\sigma + \int_{\sigma_{11}}(\mp M + N\sqrt{\varepsilon_1})\,d\sigma\right\} \end{aligned}\right.$$

nelle quali abbiamo trascurato di scrivere i due parametri x e y da cui X e V pure dipendono.

Con l'aiuto delle (21) si scrivono immediatamente le espressioni definitive delle altre quattro incognite della nostra quistione e cioè di X, V e di Y, U. Noi non vogliamo indugiarci in questa trascrizione e ci proponiamo di farlo solo nel caso in cui il problema generale di Cauchy, risoluto colle formole precedenti, si riduce al caso più semplice del problema della Kowalevsky nel quale, per $t = 0$, sono dati i valori delle incognite del nostro problema in funzione di x, y, z.