ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Meccanica. — *Rappresentazione cinematica della rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionarî.* Nota di Orazio Lazzarino, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Il prof. Vito Volterra [2], trattando la teoria dei moti del polo terrestre, ha studiato, fra altro, il problema della rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionarî. In questa Nota, con procedimento del tutto diverso e quanto mai semplice, trovo, sotto forma intrinseca ed intuitiva, le equazioni e gli integrali del problema e ne deduco con calcoli brevissimi le equazioni della polodia, le più notevoli proprietà del moto e la sua rappresentazione cinematica. Nella mia trattazione non interviene affatto il solito armamentario degli assi fissi e mobili, delle formole del Poisson ecc., generalmente adoperato nelle ordinarie trattazioni dei problemi di moto dei solidi.

1. Equazioni ed integrali del moto. — Supponendo che nel corpo abbiano luogo, sotto l'azione di forze interne, dei moti tali che non ne alterino nè la forma, nè la distribuzione di densità, non varieranno per effetto di questi nè il baricentro O del corpo, nè il suo momento d'inerzia rispetto ad un asse rigidamente connesso col corpo. Supponendo O fisso, sia Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione intorno ad O; $\mathbf{M}_i$ il momento, rispetto ad O, dell'impulso dovuto ai moti interni; α l'omografia d'inerzia [3] del sistema rispetto ad O; allora il momento dell'impulso totale del corpo, rispetto ad O, è rappresentato dal vettore $\alpha\Omega + \mathbf{M}_i$. Supponendo inoltre che il sistema sia sottratto all'azione di forze esterne, il noto *teorema dell'impulso* permette di scrivere immediatamente l'equazione del moto sotto la forma

$$\frac{d(\alpha\Omega + \mathbf{M}_i)}{dt} = 0, \tag{1}$$

da cui si deduce subito l'integrale delle aree

$$\alpha\Omega + \mathbf{M}_i = \mathbf{K}, \tag{2}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 11 agosto 1917.

[2] Vito Volterra, *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre*, Astronomische Nachrichten, Bd. 138, nn. 3291-92; Atti della R. Accad. di Torino, vol. 30, a. 1895; *Sur la théorie des variations des latitudes*, Acta Mathematica, tomo XXII.

[3] Cfr. O. Lazzarino, *Interpretazione cinematica e realizzazione meccanica del problema di Sofia Kowalewski* ecc., Rendiconti della R. Accad. delle Scienze di Napoli, serie 3ª, vol. XVII, a. 1911.

dove $\mathbf{K}$ è un vettore costante. Questa formola esprime che « *quando il sistema è sottratto all'azione di forze esterne, il momento dell'impulso totale è un vettore costante in grandezza e direzione* ».

Giova rilevare che le equazioni (1) e (2) sussistono anche nel caso più generale in cui i *moti interni non siano stazionari*.

Sviluppando la (1) e tenendo presente che [1]

$$\frac{d(\alpha\Omega)}{dt} = \alpha\frac{d\Omega}{dt} + \Omega \wedge \alpha\Omega \tag{3}$$

si ha

$$\alpha\frac{d\Omega}{dt} + \Omega \wedge \alpha\Omega + \frac{d\mathbf{M}_i}{dt} = 0\,. \tag{1_1}$$

Nel caso dei moti interni stazionarî, il vettore $\mathbf{M}_i$ ha modulo costante ed è rigidamente connesso col corpo, onde

$$\frac{d\mathbf{M}_i}{dt} = \Omega \wedge \mathbf{M}_i \tag{a}$$

e quindi la (1_1) si può scrivere

$$\alpha\frac{d\Omega}{dt} + \Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}_i) = 0\,. \tag{$1'$}$$

In tal caso sussiste, oltre il precedente, l'*integrale delle forze vive* che si ricava subito moltiplicando scalarmente la $(1')$ per Ω. Difatti, si ha $\alpha\frac{d\Omega}{dt} \times \Omega = 0$, ossia $\frac{d\Omega}{dt} \times \alpha\Omega = 0$; ma, per la (3), anche $\frac{d(\alpha\Omega)}{dt} \times \Omega = 0$, quindi, sommando questa con la seconda precedente, integrando ed indicando con h la costante d'integrazione, si ricava

$$\Omega \times \alpha\Omega = 2h \tag{4}$$ c. d. d.

Nel caso in esame può anche dedursi, quadrando la (2), l'equazione

$$(\alpha\Omega)^2 + 2\alpha\Omega \times \mathbf{M}_i = \mathrm{K}_1 \tag{$2'$}$$

dove $\mathrm{K}_1 = \mathbf{K}^2 - \mathbf{M}_i^2$ è una costante.

2. Equazioni della polodia e proprietà notevoli del moto. — Riferendomi sempre, da ora in poi, al caso dei moti interni stazionarî, scrivo l'equazione dell'ellissoide centrale d'inerzia del sistema

$$(\mathrm{M} - \mathrm{O}) \times \alpha(\mathrm{M} - \mathrm{O}) = 1\,. \tag{5}$$

[1] Cfr. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, tomo II, pag. 1 [Pavia, 1913].

Indicando con P il punto intersezione della retta $O\Omega$ con questo ellissoide, il luogo di P sull'ellissoide dicesi *polodia*. Si dimostra facilmente che « *per ogni posizione dell'asse istantaneo di rotazione* $O\Omega$, *la velocità* « *angolare del sistema è proporzionale al modulo del vettore* $P - O$, « *ossia al semidiametro dell'ellissoide d'inerzia coincidente con l'asse* « *istantaneo di rotazione* ».

Difatti, poichè P è un punto dell'ellissoide centrale d'inerzia, la (5) dà

$$(5') \qquad (P - O) \times \alpha(P - O) = 1\,;$$

ponendo poi: $\mathrm{mod}\,(P - O) = \varrho$, $\mathrm{mod}\,\Omega = \omega$, si ha

$$(6) \qquad P - O = \frac{\varrho}{\omega}\,\Omega\,;$$

sostituendo nella (5′) viene $\dfrac{\varrho^2}{\omega^2}\,\Omega \times \alpha\Omega = 1$, da cui, per la (4), si ricava

$$(7) \qquad \omega = \varrho\,.\sqrt{2h} \qquad\qquad \text{c. d. d.}$$

In base a questa proprietà *si può determinare la polodia* e quindi tutte le possibili posizioni dell'asse istantaneo di rotazione. Difatti, sostituendo nella (2′) al vettore Ω l'espressione

$$(8) \qquad \Omega = \sqrt{2h}\,(P - O),$$

si ha

$$(9) \qquad [\alpha(P - O)]^2 + \frac{2}{\sqrt{2h}}\,\alpha(P - O) \times \mathbf{M}_i = \frac{K_1}{2h}\,.$$

La (5′) e la (9) *sono le equazioni della polodia.*

Dalla (2) si ricava ancora, tenendo conto della (8),

$$\left(P - O + \frac{\alpha^{-1}\,\mathbf{M}_i}{\sqrt{2h}}\right) \times \alpha^2 \left(P - O + \frac{\alpha^{-1}\,\mathbf{M}_i}{\sqrt{2h}}\right) = \frac{\mathbf{K}^2}{2h}$$

che è un'altra forma della (9); onde si può dire che la polodia è l'intersezione dell'ellissoide d'inerzia (5′) con l'ellissoide di centro O_1

$$(9') \qquad (P - O_1) \times \alpha^2 (P - O_1) = \frac{\mathbf{K}^2}{2h}$$

dove

$$(10) \qquad O_1 = O - \frac{\alpha^{-1}\,\mathbf{M}_i}{\sqrt{2h}}\,.$$

È importante osservare che dalla (2) si possono immediatamente ricavare le equazioni parametriche della polodia. Infatti la (2) porge

$$(2'') \qquad \alpha\Omega = \mathbf{K} - \mathbf{M}_i$$

da cui si ha la relazione $\Omega = \alpha^{-1}(\mathbf{K} - \mathbf{M}_i)$ che fornisce l'espressione della velocità angolare Ω, e siccome dalle (6) e (7) si ha $P - O = \frac{1}{\sqrt{2h}}\Omega$, segue

$$P = O + \frac{1}{\sqrt{2h}}\alpha^{-1}(\mathbf{K} - \mathbf{M}_i) \tag{11}$$

che è l'*espressione esplicita del punto generico* P *che descrive la polodia*. In questa formola figura il vettore costante **K** che è completamente determinato quando siano date le condizioni iniziali, le quali appunto determinano il moto del sistema; perciò, date queste, la (11) fornisce le equazioni parametriche della polodia.

È facile calcolare la velocità con cui il punto P si muove sulla polodia o sull'erpolodia. Infatti, ricordando che $P = O + \frac{\Omega}{\sqrt{2h}}$ si ha successivamente per le (1′) e (2)

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2h}}\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{2h}}\alpha^{-1}(\Omega \wedge \mathbf{K}) = -\alpha^{-1}[(P - O) \wedge \mathbf{K}] \tag{b}$$

che dà la velocità cercata, la quale può facilmente costruirsi ricorrendo all'ellissoide reciproco di quello d'inerzia. Si osserva che nei punti della polodia per i quali è $\Omega \wedge \mathbf{K} = 0$ la velocità di P è nulla; tali punti, come si vedrà in una Nota successiva, sono *punti doppi* della polodia, la quale, se non è degenere, ne ammette uno solo.

Si dimostrano molto facilmente *altre notevoli proprietà del moto*: Chiamo *piano polare relativo al polo di rotazione* P, il piano tangente in P all'ellissoide centrale d'inerzia. Indico con $S - O = \alpha\Omega + \mathbf{M}_i$ il vettore dell'impulso totale del sistema e con $H - O = \mathbf{M}_i$ quello dovuto ai moti interni. Il vettore $S - O$ è fisso nello spazio; il punto H, essendo i moti interni stazionarî, è fisso nell'interno del corpo, onde la retta OH può chiamarsi *asse dei moti interni*.

Dalle espressioni di $S - O$ ed $H - O$ si deduce per differenza

$$S - H = \alpha\Omega; \tag{12}$$

ora, per la (8), la (4) può scriversi

$$(P - O) \times \alpha\Omega = \sqrt{2h} \tag{13}$$

quindi, essendo ben noto che il vettore $\alpha(P - O)$, parallelo ad $\alpha\Omega$, è perpendicolare al piano tangente in P all'ellissoide d'inerzia, si conclude, in virtù della (12), che questo piano tangente, che è il piano polare relativo al punto P, è perpendicolare al vettore $S - H$. Sussiste dunque la proprietà che « *il piano polare è sempre perpendicolare al vettore che congiunge* « *l'estremo* S *dell'asse della coppia dell'impulso totale del sistema con* « *l'estremo* H *dell'asse dei moti interni* ».

La distanza δ del baricentro O del sistema dal piano polare è data da

$$\delta = (P - O) \times \frac{\alpha \Omega}{\operatorname{mod} \alpha \Omega}$$

ossia, tenendo presenti le (12) e (13),

$$\delta = \frac{\sqrt{2h}}{\operatorname{mod}(S - H)} \tag{14}$$

cioè « *la distanza del baricentro del sistema dal piano polare varia in* « *ragione inversa della distanza* SH ».

3. Rappresentazione cinematica del moto. — Sia P la posizione del polo di rotazione al tempo t; se Q è un punto generico del piano polare in P, deve essere soddisfatta l'equazione $(Q - P) \times \alpha\Omega = 0$; sommando questa con la (13), si ha $(Q - O) \times \alpha\Omega = \sqrt{2h}$, ossia, per la (2''),

$$(Q - O) \times (\mathbf{K} - \mathbf{M}_i) = \sqrt{2h}\,. \tag{15}$$

Questo piano polare varia al variare di t, perchè il vettore $\mathbf{M}_i$ (di modulo costante) è funzione del tempo. Per trovare la caratteristica relativa a questo piano, cioè la sua intersezione col piano corrispondente al tempo $t + dt$, basta derivare la (15) rispetto a t, come insegna la teoria generale degli inviluppi. Essendo $\mathbf{K}$ costante, risulta

$$\frac{d\mathbf{M}_i}{dt} \times (Q - O) = 0$$

ossia, per la (a),

$$\Omega \wedge \mathbf{M}_i \times (Q - O) = 0\,. \tag{16}$$

Ora, il piano rappresentato da questa equazione è evidentemente il piano POH, cioè il piano individuato dal polo P di rotazione e dall'asse $\mathrm{O}\mathbf{M}_i$ dei moti interni. Dunque « *il piano polare ha per caratteristica la sua* « *intersezione col piano* POH ».

Interpretando questa intersezione come l'asse istantaneo intorno a cui ruota nell'istante t il piano polare, si può dire che « *in ogni istante il* « *piano polare ruota intorno alla sua intersezione col piano che contiene* « *il polo di rotazione e l'asse dei moti interni* ».

Immaginando condotte per ciascun punto della polodia le caratteristiche, cioè le rette che rappresentano gli assi istantanei di rotazione dei corrispondenti piani polari, il luogo di queste rette è una rigata sviluppabile che può chiamarsi *rigata assiale*; questa ha evidentemente per piani tangenti i piani polari e quindi risulta tangente all'ellissoide d'inerzia ed è ad esso invariabilmente collegata. Si ha dunque questa semplice rappresentazione cinematica:

« *Il moto del sistema si può riprodurre facendo rotolare l'ellissoide* « *centrale d'inerzia sul piano polare, mentre questo ruota intorno alla* « *sua retta di contatto con la rigata assiale* ».

Fisica. — *Sulla scoperta delle leggi delle variazioni adiabatiche dello stato gazoso.* Nota I di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna [1].

La relazione $pv^k =$ costante fra le variazioni adiabatiche della pressione e del volume dei gaz perfetti fu, per molto tempo e da molti autori, attribuita a Poisson, ma taluni l'hanno attribuita invece a Laplace.

Avogadro (Mem. dell'Acc. delle Scienze di Torino, tomo 33, 1829) scrivendo pochi anno dopo la pubblicazione della formula, e combattendo le obbiezioni che ad essa faceva Ivory, l'attribuisce a Poisson.

Cazin invece (Ann. de ch. et de ph., 1862) in uno studio importante sulla espansione e compressione dei gaz, chiama questa relazione e quella fra il volume e la temperatura, equazioni di Laplace e di Poisson, ritenendo quindi che nessuno dei due possa esserne considerato come l'unico autore incontrastato.

Nel trattato di Fisica di Jamin, interamente rifuso da Bouty (4ª ediz., vol. II**, pag. 50), la formula suddetta viene attribuita a Laplace, ed in nota si osserva: « Poisson, a cui taluni autori attribuiscono questa formula, non ne ha dato che una dimostrazione inesatta ». [Laplace, *Mécanique céleste*, t. V, pag. 153; Poisson, *Traité de mécanique*. t. II, pag. 64 (640 invece); Journal de l'École Polytechnique, XIV cahier].

Confidando forse in questa affermazione, anche il Roiti (*Trattato di Fisica*, 5ª ediz., vol. I, pag. 483) attribuisce la formula a Laplace, e così fanno Chappuis et Berget (*Phys. générale*, vol. I, pag. 401, 2ª edizione) e Leduc (Journ. de phys., 1916, pag. 9) mentre Waltenhofen, Chwolson, Battelli e Cardani nei loro trattati l'attribuiscono a Poisson.

Finalmente il prof. Grassi, in una Nota recente (Rend. dell'Accad. dei Lincei, marzo 1916) citando l'affermazione di Bouty, precisa l'errore a cui essa accenna, osservando che esso « consiste essenzialmente nell'aver considerato dq/dp e dq/dv come derivate parziali, mentre noi oggi sappiamo che

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1917.