ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Matematica. — *Sul teorema generale di permutabilità per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali.* Nota del Socio Luigi Bianchi [1].

1. In diverse Note pubblicate nei volumi XXIV, XXV e XXVI di questi Rendiconti (1915, 16, 17), occupandomi dei sistemi tripli di superficie ortogonali, e più in generale dei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio S_n euclideo, o a curvatura costante, ho più volte accennato che per le trasformazioni di Ribaucour di siffatti sistemi (trasformazioni per inviluppi di sfere o di ipersfere) sussiste un teorema generale di *permutabilità*. Questo è affatto analogo al teorema di permutabilità per le trasformazioni *asintotiche* delle superficie, o trasformazioni per congruenze W [2]; ed anzi nel caso $n=2$ delle trasformazioni di Ribaucour per le superficie l'indicato teorema segue dall'altro per le congruenze W applicando la trasformazione (di contatto) di S. Lie, che cangia le rette in sfere e le linee asintotiche in linee di curvatura [3].

Nella presente comunicazione stabilisco le formole effettive per il generale teorema di permutabilità delle trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali che si enuncia:

Se ad un sistema n^{plo} ortogonale $(\sum)$ sono contigui, per trasformazioni di Ribaucour, due altri sistemi $(\sum')$, $(\sum'')$, esiste una intera serie ∞^1

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1917.

[2] Cfr. *Lezioni*, vol. II, §§ 247, 248.

[3] L'osservazione è già contenuta in una mia Nota sulle trasformazioni D_m di Darboux (questi Rendiconti, fascicolo del 24 aprile 1904).

di sistemi $(\overline{\Sigma})$, *contenente* (Σ), *e deducibile con quadrature, tale che ogni sistema* $(\overline{\Sigma})$ *è contiguo, per trasformazioni di Ribaucour, ai due fissi* (Σ'), (Σ'').

Colle consuete notazioni [1], definiamo il sistema n^{plo} ortogonale (Σ) dello spazio S_n euclideo mediante la forma che assume il corrispondente ds^2 dello spazio:

$$ds^2 = \sum_i^{1\ldots n} H_i^2\, du_i^2\,, \tag{1}$$

dove i coefficienti H_i e le relative rotazioni

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i} \qquad (i \neq k)$$

soddisfano al sistema differenziale caratteristico:

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \;,\quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk} \qquad (i \neq k \neq l) \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k} = 0 \;\text{[2]}. \end{aligned}\right.$$

Per le n ccordinate cartesiane ortogonali del punto $P \equiv (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ adottiamo qui la notazione

$$x, y, z, \ldots, t,$$

e corrispondentemente denotiamo con

$$X_i, Y_i, Z_i, \ldots, T_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

i coseni di direzione dello spigolo i^{mo} dell'n^{edro} principale. Sussistono allora le formole fondamentali

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u_i} = H_i X_i \;,\quad \frac{\partial X_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} X_k \\ &\frac{\partial X_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} X_\lambda\,, \end{aligned}\right.$$

colle analoghe per gli assi coordinati O_y, O_z, ...

2. Sia ora (Σ') un nuovo sistema n^{plo} ortogonale dedotto da (Σ) con una trasformazione di Ribaucour, e scriviamo le formole di trasformazione sotto la forma data ai nn. 2, 3 della Nota ora citata, dove però ora tro-

(1) Cfr. particolarmente la Nota del 19 marzo 1916 (vol. XXV dei Rendiconti).

(2) Ricordo che la notazione $\sum_\lambda^{(i,k)}$ significa che all'indice λ di sommazione si dànno tutti i valori $1, 2, 3, \ldots, n$ *eccetto i due fissi* i, k.

viamo opportuno cangiare i segni delle quantità H'_i, X'_i negli opposti. La trasformazione dipende dalle $2n+2$ *funzioni trasformatrici*

$$\gamma_i\,,\ H'_i\,,\ \varphi\,,\ \psi\,,$$

che debbono soddisfare al sistema differenziale seguente:

$$(B)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}\,\gamma_k \quad , \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i}=(H_i-H'_i)\,\psi-\sum_\lambda^{(i)}\beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}=H_i\,\gamma_i \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_i}=-\frac{\gamma_i\,H'_i}{\varphi}\,\psi \\ &\frac{\partial H'_i}{\partial u_k}=\left\{\beta_{ki}+(H'_i-H_i)\,\frac{\gamma_k}{\varphi}\right\}\cdot H'_k \end{aligned}\right.$$

ed alla relativa equazione in termini finiti

$$(B^*)\qquad \sum_\lambda \gamma_\lambda^2=2\,\psi\,\varphi\,.$$

Per altro la trasformazione è già pienamente determinata dalle $n+1$ funzioni trasformatrici *essenziali*

$$\gamma_1\,,\ \gamma_2\,,\ \dots\,,\ \gamma_n\,;\ \varphi$$

assoggettate a soddisfare alla parte delle (B) date da

$$(b)\qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}\,\gamma_k\quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}=H_i\,\gamma_i\,;$$

la ψ si calcola dopo ciò dalla (B*) e le altre delle (B) dànno i valori delle H'_i.

Per il sistema trasformato $(\sum')$, i cui elementi indichiamo con accenti, abbiamo le formole:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x'&=x-\frac{2\varphi}{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2}\cdot\sum \gamma_\lambda\,X_\lambda \\ X'_i&=X_i-\frac{2\gamma_i}{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2}\cdot\sum \gamma_\lambda\,X_\lambda\,. \end{aligned}\right.$$

I due sistemi $(\sum)$, $(\sum')$ si trovano in relazione perfettamente simmetrica, ed importa calcolare le funzioni trasformatrici

$$\gamma'_1\,,\ \gamma'_2\,,\ \dots\,,\ \gamma'_n\,;\ \varphi'$$

pel passaggio inverso da $(\sum')$ a $(\sum)$. Dovendo valere ancora le (3) permutando i due sistemi, abbiamo le proporzioni

$$\gamma'_1:\gamma'_2:\dots:\gamma'_n:\varphi'=\gamma_1:\gamma_2:\dots:\gamma_n:\varphi\,,$$

e possiamo porre

$$\gamma'_i = \mu\gamma_i \quad , \quad \varphi' = \mu\varphi \, ,$$

dove si tratterà di calcolare il fattore μ di proporzionalità. Le condizioni

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial u_i} = \mathrm{H}'_i \, \gamma'_i$$

dànno subito

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial u_i} = \frac{\mathrm{H}'_i - \mathrm{H}_i}{\varphi} \gamma_i \, , \tag{4}$$

ed in effetto risulta dalle (B) che l'espressione

$$\sum_\lambda \frac{\mathrm{H}'_\lambda - \mathrm{H}_\lambda}{\varphi} \gamma_\lambda \, du_\lambda$$

è un differenziale esatto. Così dalle (4) si ha μ (a meno di un fattore costante naturalmente indeterminato) con una quadratura e per le funzioni trasformatrici nel passaggio da $(\sum')$ a $(\sum)$ le formole

$$\gamma'_i = \mu\gamma_i \quad , \quad \varphi' = \mu\varphi \, , \tag{5}$$

alle quali si può anche aggiungere per la (B^*) l'altra

$$\psi' = \mu\psi \, .$$

3. Venendo ora al teorema di permutabilità, supponiamo che da $(\sum)$ siasi dedotto un secondo sistema $(\sum'')$ con una trasformazione di Ribaucour, le cui funzioni trasformatrici indicheremo, per non moltiplicare le notazioni, con

$$\gamma'_i \, , \, \varphi' \, , \, \mathrm{H}''_i \, , \, \psi' \, ,$$

avvertendo dunque che qui $\gamma'_i \, , \varphi' \, , \psi'$ non hanno più il significato delle formole (5). Per queste funzioni trasformatrici sussisteranno le formole analoghe alle $(\mathrm{B}) \, , (\mathrm{B}^*)$:

$$(\mathrm{B}_1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma'_k \quad , \quad \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} = (\mathrm{H}_i - \mathrm{H}''_i)\, \psi' - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma'_\lambda \\ &\frac{\partial \varphi'}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i \, \gamma'_i \quad , \quad \frac{\partial \psi'}{\partial u_i} = - \frac{\gamma'_i \, \mathrm{H}''_i}{\varphi'} \psi' \\ &\frac{\partial \mathrm{H}''_i}{\partial u_k} = \left\{ \beta_{ki} + (\mathrm{H}''_i - \mathrm{H}_i) \frac{\gamma'_k}{\varphi'} \right\} \cdot \mathrm{H}''_k \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{B}_1^*) \quad \sum_\lambda \gamma'^2_\lambda = 2\varphi'\psi' \, ,$$

e per gli elementi di $(\sum'')$, che indichiamo con doppio accento, le formole del tipo (3)

$$(6)\qquad \begin{cases} x'' = x - \dfrac{2\varphi'}{\sum\limits_\lambda \gamma_\lambda'^2} \cdot \sum\limits_\lambda \gamma_\lambda' X_\lambda \\ X_i'' = X_i - \dfrac{2\gamma_i'}{\sum\limits_\lambda \gamma_\lambda'^2} \cdot \sum\limits_\lambda \gamma_\lambda' X_\lambda \,. \end{cases}$$

Cominciamo dal dimostrare che si può determinare, con quadrature, una serie ∞^1 di sistemi $(\overline{\sum})$ derivati per trasformazione di Ribaucour *dal sistema* $(\sum')$ con funzioni trasformatrici (essenziali), che indicheremo con $\overline{\gamma}_i, \overline{\varphi}$, della speciale forma seguente:

$$(7)\qquad \begin{cases} \overline{\gamma}_i = \Omega \gamma_i + a \gamma_i' \\ \overline{\varphi} = \Omega \varphi + a \varphi' \,, \end{cases}$$

dove a indica una costante ed Ω una funzione delle $u_1, u_2, \dots, u_n$ da determinarsi in guisa che le $\overline{\gamma}_i, \overline{\varphi}$ soddisfino alle relative equazioni caratteristiche (b)

$$(b')\qquad \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}' \overline{\gamma}_k \quad , \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_i} = H_i' \overline{\gamma}_i \,,$$

le β_{ik}' essendo le rotazioni del sistema $(\sum')$, che dalle ultime (B) si calcolano in

$$\beta_{ik}' = \beta_{ik} + (H_k' - H_k) \frac{\gamma_i}{\varphi} \,.$$

Introducendo per le $\overline{\gamma}_i, \overline{\varphi}$ i valori (7) ed osservando le (B), (B_1), troviamo quali condizioni *necessarie e sufficienti* cui deve soddisfare Ω le n seguenti

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = \frac{H_i' - H_i}{\varphi} \gamma_i \Omega + a \frac{H_i' - H_i}{\varphi} \gamma_i' \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

a cui per le (4) possiamo dare la forma

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\Omega}{\mu}\right) = a \frac{H_i' - H_i}{\varphi \mu} \gamma_i' \,.$$

Ora si constata subito, mediante le formole (A), (B) e le (4), che l'espressione

$$\sum_\lambda \frac{H_\lambda' - H_\lambda}{\varphi \mu} \gamma_\lambda' \, du_\lambda$$

è un differenziale esatto, onde ponendo

$$\Phi = \mu \int \sum_\lambda \frac{H'_\lambda - H_\lambda}{\varphi \mu} \gamma'_\lambda \, du_\lambda , \tag{9}$$

avremo dalle (8)

$$\Omega = c\mu + a\Phi ,$$

con c costante arbitraria. Le formole (7) dànno quindi

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{\gamma}_i &= c\mu\gamma_i + a(\Phi\gamma_i + \gamma'_i) \\ \overline{\varphi} &= c\mu\varphi + a(\Phi\varphi + \varphi') , \end{aligned} \right. \tag{10}$$

e viceversa con questi valori per le $\overline{\gamma}_i , \overline{\varphi}$, qualunque siano le costanti a , c, si soddisfano le equazioni (b'), onde resta definita, come si voleva, una serie ∞^1 di sistemi $(\overline{\sum})$, tutti trasformati di Ribaucour del sistema $(\sum')$. Il parametro che definisce il sistema $(\overline{\sum})$ nella serie ∞^1 è il rapporto $\frac{a}{c}$, e in particolare pel valore zero di questo parametro il sistema $(\overline{\sum})$ viene a coincidere, a causa delle formole inverse (5), col sistema iniziale $(\sum)$, il quale è legato non soltanto a $(\sum')$, ma anche a $(\sum'')$ da una trasformazione di Ribaucour.

Ora andiamo a dimostrare il teorema di permutabilità provando che lo stesso accade di qualunque altro sistema $(\overline{\sum})$ nella nostra serie ∞^1. Per questo prendiamo le formole che dànno, secondo le (3), in termini finiti il sistema $(\overline{\sum})$ i cui elementi indichiamo con un soprasegno; avremo

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{x} &= x' - \frac{2\overline{\varphi}}{\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda X'_\lambda \\ \overline{X}_i &= X'_i - \frac{2\overline{\gamma}_i}{\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda X'_\lambda . \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Sarà provato che questo sistema generico $(\overline{\sum})$ è legato (oltre che a $(\sum')$) a $(\sum'')$ da una trasformazione di Ribaucour se, paragonando le (11) colle (6) che definiscono $(\sum'')$, dimostriamo che per gli n assi coordinati $O_x , O_y , \ldots$ sussistono formole del tipo

$$\overline{x} - x'' = R_i(X''_i - \overline{X}_i) \quad , \quad \overline{y} - y'' = R_i(Y''_i - \overline{Y}_i) , \ldots \tag{12}$$
$$(i = 1 , 2 , \ldots , n) ,$$

dove $R_1 , R_2 , \ldots , R_n$ sono n convenienti moltiplicatori, il cui significato geometrico sarà poi quello dei raggi delle n ipersfere che toccano in punti corrispondenti le ipersuperficie dei due sistemi $(\overline{\sum}) , (\sum'')$.

4. Dimostriamo le (12) e troviamo gli effettivi valori dei raggi R_i col procedimento seguente. Si moltiplichino ordinatamente le n formole (12) per $X_k, Y_k, \ldots$ (essendo k un indice qualunque differente od eguale ad i) e si sommi. Indicando col simbolo S queste somme rispetto agli n assi coordinati, deduciamo così dalle (12) il sistema *perfettamente equivalente* [1]:

$$(12^*) \qquad \tfrac{1}{2} S(\overline{x} - x'')\, X_k = R_i \cdot \tfrac{1}{2} S(X_i'' - \overline{X}_i)\, X_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Calcoliamo queste espressioni osservando che dalle (11), paragonate colle (3) e (6), abbiamo:

$$\left\{\begin{aligned} \overline{x} - x'' &= -\frac{2\varphi}{\sum_j \gamma_j^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + \frac{2\varphi'}{\sum_j \gamma_j'^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda' X_\lambda - \frac{2\overline{\varphi}}{\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda X_\lambda' \\ X_i'' - \overline{X}_i &= \frac{2\gamma_i}{\sum_j \gamma_j^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda - \frac{2\gamma_i'}{\sum_j \gamma_j'^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda' X_\lambda + \frac{2\overline{\gamma}_i}{\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda X_\lambda', \end{aligned}\right.$$

e sussistono d'altronde, per le formole dei nn. precedenti, le identità

$$S X_i X_k = \varepsilon_{ik} \ (^2) \quad , \quad S X_i' X_k = \varepsilon_{ik} - \frac{2\gamma_i \gamma_k}{\sum_j \gamma_j^2},$$

$$\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda \gamma_\lambda = \Omega \sum_j \gamma_j^2 + a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma_\lambda',$$

dalle quali seguono le altre

$$S X_k \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda = \gamma_k \quad , \quad S X_k \sum_\lambda \gamma_\lambda' X_\lambda = \gamma_k',$$

$$S X_k \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda X_\lambda' = a\gamma_k' - \Omega\gamma_k - \frac{2\gamma_k}{\sum_j \gamma_j^2}\, a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma_\lambda'.$$

Se calcoliamo con queste formole i valori dei primi e secondi membri nelle (12*), troviamo delle espressioni lineari omogenee in γ_k, γ_k', che scriviamo

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2} S(\overline{x} - x'')\, X_k &= A\gamma_k + B\gamma_k' \\ \tfrac{1}{2} S(X_i'' - \overline{X}_i)\, X_k &= C\gamma_k + D\gamma_k', \end{aligned}\right.$$

i coefficienti A, B, C, D avendo i valori seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{\overline{\varphi}}{\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2}\left(\Omega + \frac{2a}{\sum_j \gamma_j^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma_\lambda'\right) - \frac{\varphi}{\sum_j \gamma_j^2} \quad , \quad B = \frac{\varphi'}{\sum_j \gamma_j'^2} - \frac{a\overline{\varphi}}{\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda'^2} \\ C &= \frac{\gamma_i}{\sum_j \gamma_j^2} - \frac{\overline{\gamma}_i}{\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2}\left(\Omega + \frac{2a}{\sum_j \gamma_j^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma_\lambda'\right) \quad , \quad D = \frac{a\overline{\gamma}_i}{\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} - \frac{\gamma_i'}{\sum_j \gamma_j'^2}. \end{aligned}\right.$$

[1] Il determinante $|X_k, Y_k, \ldots, T_k|$ dei coseni è infatto diverso da zero (= 1).

[2] Attribuiamo ad ε_{ik} il consueto significato: $\varepsilon_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ per } i \neq k \\ 1 \text{ per } i = k. \end{cases}$

Siccome abbiamo

$$\overline{\varphi} = a\varphi' + \Omega\varphi \quad , \quad \overline{\gamma}_i = a\gamma'_i + \Omega\gamma_i \, ,$$

indi

$$\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2 = a^2 \sum_j \gamma_j'^2 + 2a\Omega \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda + \Omega^2 \sum_j \gamma_j^2 \, ,$$

le espressioni di A , B , C , D si trasformano subito nelle seguenti:

$$\left|\begin{aligned}
A &= a \frac{\varphi'(\Omega \sum_j \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda) - a\varphi \sum_j \gamma_j'^2}{\sum_j \gamma_j^2 \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \\
B &= \Omega \frac{\varphi'(\Omega \sum_j \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda) - a\varphi \sum_j \gamma_j'^2}{\sum_j \gamma_j'^2 \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \\
C &= a \frac{a\gamma_i \sum_j \gamma_j'^2 - \gamma'_i(\Omega \sum_j \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda)}{\sum_j \gamma_j^2 \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \\
D &= \Omega \frac{a\gamma_i \sum_j \gamma_j'^2 - \gamma'_i(\Omega \sum_j \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda)}{\sum_j \gamma_j'^2 \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \, .
\end{aligned}\right.$$

Ne segue che sussiste la proporzione

$$A : B = C : D \, ,$$

onde nella (13) il rapporto

$$\frac{S(\overline{x} - x'')\, X_k}{S(X_i'' - \overline{X}_i)\, X_k} = \frac{A\gamma_k + B\gamma'_k}{C\gamma_k + D\gamma'_k}$$

è indipendente dall'indice k $\left(\text{dal rapporto } \dfrac{\gamma_k}{\gamma'_k}\right)$ ed eguale ad $\dfrac{A}{C}$. Valgono dunque in effetto le (12*), ove si prenda

$$\text{(14)} \qquad R_i = \frac{A}{C} = \frac{\varphi'(\Omega \sum_j \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda) - a\varphi \sum_j \gamma_j'^2}{a\gamma_i \sum_j \gamma_j'^2 - \gamma'_i(\Omega \sum \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda)} \, ,$$

ed il teorema di permutabilità enunciato al n. 1 resta così stabilito.

5. Ora possiamo completare le proprietà geometriche inerenti al teorema di permutabilità partendo dall'osservazione che le $\overline{\gamma}_i$, $\overline{\varphi}$ date dalle formole (10) si compongono linearmente ed omogeneamente con due loro sistemi particolari di valori, per la qual cosa si dirà che la serie ∞^1 di sistemi $(\overline{\Sigma})$ forma un *fascio*.

Prendiamo allora i due sistemi $(\sum')$, $(\sum'')$ prima derivati da $(\sum)$ e consideriamo (con evidente notazione) il fascio $c_1(\sum')+c_2(\sum'')$ da essi determinato, cioè la serie ∞^1 di sistemi trasformati di $(\sum)$ mediante le funzioni trasformatrici

$$c_1\gamma_i+c_2\gamma'_i \quad , \quad c_1\varphi+c_2\varphi' ,$$

essendo c_1, c_2 due costanti arbitrarie, e il loro rapporto $\frac{c_1}{c_2}$ il parametro essenziale nel fascio.

Dette $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ le coordinate del punto $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mobile nel sistema generico del fascio, avremo per le (3) le formole

$$(15) \qquad \xi = x - 2\,\frac{c_1\varphi+c_2\varphi'}{c_1^2\sum_j \gamma_j^2+2c_1c_2\sum_j\gamma_j\gamma'_j+c_2^2\sum_j\gamma_j'^2}\cdot \left(c_1\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + c_2\sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda\right).$$

È evidente che il fascio $c_1(\sum')+c_2(\sum'')$ resta lo stesso sostituendo a $(\sum')$, $(\sum'')$ due qualunque altri sistemi del fascio, e così in particolare se, tenendo fisso $(\sum')$, sostituiamo a $(\sum'')$ un altro sistema del fascio. Ma si è visto sopra che un qualunque sistema $(\sum)$ dell'altro fascio è legato a $(\sum'')$ da una trasformazione di Ribaucour, e lo stesso vale quindi facendo variare $(\sum'')$ nel fascio. I due fasci sono manifestamente in relazione reciproca, onde nel teorema di permutabilità così completato: *si hanno due fasci di sistemi n^{pli} ortogonali tali che due sistemi presi ad arbitrio l'uno nel primo l'altro nel secondo fascio sono fra loro legati da una trasformazione di Ribaucour* (¹).

È anche interessante osservare che: *il luogo dei punti corrispondenti nei sistemi di uno stesso fascio è un circolo.* Questo risulta dalle formole (15), ove, restando fisse $u_1, u_2, \ldots, u_n$, i secondi membri sono funzioni razionali quadratiche del parametro $\frac{c_1}{c_2}$, ed il punto $(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ descrive un circolo.

6. Il teorema generale di permutabilità, così completato, ammette numerose applicazioni a casi particolari: per $n=2$ alle trasformazioni di Ribaucour delle superficie, per $n=3$ a quelle dei sistemi tripli ortogonali, ecc.

Ma vi ha un'altra circostanza molto notevole, che qui accenniamo soltanto riserbandone lo sviluppo a più ampio lavoro, e che si presenta per interessanti classi di enti geometrici, fra i quali citeremo: per le superficie

(¹) Per il caso delle congruenze W queste conseguenze del teorema di permutabilità vennero sviluppate dal Tortorici nella sua tesi di laurea pubblicata nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

quelle a curvatura totale (o media) costante, e le generali superficie isoterme, pei sistemi tripli ortogonali nell' S_3 i sistemi di Weingarten, nello spazio S_n i sistemi n^{pli} ortogonali (E) (caratterizzati dalla simmetria delle rotazioni $\beta_{ik} = \beta_{ki}$), i sistemi ortogonali di Guichard-Darboux con

$$H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 = \text{cost.}$$

Per tutti questi sistemi, e innumerevoli altri, accade dunque che le trasformazioni di Ribaucour possono dirigersi in modo che appartenendo il sistema $(\sum)$ (la superficie) alla classe considerata, anche i due contigui $(\sum')$, $(\sum'')$ siano della medesima classe. Ed allora, nei casi in vista, si presenta costantemente questo fatto che nella serie ∞^1 di sistemi $(\overline{\sum})$ trasformati ve ne ha *oltre* $(\sum)$, *uno ed uno soltanto* appartenente alla classe considerata. Questo particolare sistema $(\overline{\sum})$, come isolato, si ottiene quindi *in termini finiti*.

In tutti questi casi, come per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, il teorema di permutabilità perfeziona quindi i metodi di trasformazione, permettendo di dedurre sempre nuovi sistemi della classe *senza alcun calcolo d'integrazione*. È questo un risultato che appare importante tanto geometricamente, quanto dal punto di vista analitico come proprietà delle soluzioni dei corrispondenti sistemi di equazioni a derivate parziali.

Meccanica. — *Assi permanenti nel moto di rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionari.* Nota di Orazio Lazzarino, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

In una Nota precedente [2], alla quale mi riferisco anche per la parte bibliografica, ho trovato che, per la rotazione di un corpo sottratto all'azione di forze esterne e nel quale sussistono dei moti interni tali che non ne alterino nè la forma nè la distribuzione di densità, l'equazione del moto può scriversi sotto la forma molto semplice

$$\frac{d(\alpha\Omega + \mathbf{M}_i)}{dt} = 0 \tag{1}$$

da cui si ricava immediatamente l'*integrale delle aree* sotto la forma notevole

$$\alpha\Omega + \mathbf{M}_i = \mathbf{K} \tag{2}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1917.

[2] O. Lazzarino, *Rappresentazione cinematica del moto di rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionari*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXVI, 2° sem., fasc. 5.