ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

quelle a curvatura totale (o media) costante, e le generali superficie isoterme, pei sistemi tripli ortogonali nell' S_3 i sistemi di Weingarten, nello spazio S_n i sistemi n^{pli} ortogonali (E) (caratterizzati dalla simmetria delle rotazioni $\beta_{ik} = \beta_{ki}$), i sistemi ortogonali di Guichard-Darboux con

$$H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 = \text{cost.}$$

Per tutti questi sistemi, e innumerevoli altri, accade dunque che le trasformazioni di Ribaucour possono dirigersi in modo che appartenendo il sistema (Σ) (la superficie) alla classe considerata, anche i due contigui (Σ'), (Σ'') siano della medesima classe. Ed allora, nei casi in vista, si presenta costantemente questo fatto che nella serie ∞^1 di sistemi $(\overline{\Sigma})$ trasformati ve ne ha *oltre* (Σ), *uno ed uno soltanto* appartenente alla classe considerata. Questo particolare sistema $(\overline{\Sigma})$, come isolato, si ottiene quindi *in termini finiti*.

In tutti questi casi, come per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, il teorema di permutabilità perfeziona quindi i metodi di trasformazione, permettendo di dedurre sempre nuovi sistemi della classe *senza alcun calcolo d'integrazione*. È questo un risultato che appare importante tanto geometricamente, quanto dal punto di vista analitico come proprietà delle soluzioni dei corrispondenti sistemi di equazioni a derivate parziali.

Meccanica. — *Assi permanenti nel moto di rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionarî.* Nota di Orazio Lazzarino, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

In una Nota precedente [2], alla quale mi riferisco anche per la parte bibliografica, ho trovato che, per la rotazione di un corpo sottratto all'azione di forze esterne e nel quale sussistono dei moti interni tali che non ne alterino nè la forma nè la distribuzione di densità, l'equazione del moto può scriversi sotto la forma molto semplice

$$\frac{d(\alpha\Omega + \mathbf{M}_i)}{dt} = 0 \tag{1}$$

da cui si ricava immediatamente l'*integrale delle aree* sotto la forma notevole

$$\alpha\Omega + \mathbf{M}_i = \mathbf{K} \tag{2}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1917.

[2] O. Lazzarino, *Rappresentazione cinematica del moto di rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionarî*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXVI, 2° sem., fasc. 5.

dove $\mathbf{K}$ è un vettore costante [1] completamente determinato quando sian date le condizioni iniziali del moto; Ω è il vettore rappresentativo della velocità istantanea di rotazione intorno al baricentro O del corpo; $\mathbf{M}_i$ il momento, rispetto ad O, dell'impulso dovuto ai moti interni; α l'omografia d'inerzia del sistema sempre rispetto ad O. Ho pure dimostrato che, nel caso dei moti interni stazionarî, sviluppando la (1) si ha

$$(1') \qquad \alpha \frac{d\Omega}{dt} + \Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}_i) = 0$$

e che, oltre il precedente, sussiste anche l'*integrale delle forze vive*

$$(3) \qquad \Omega \times \alpha\Omega = 2h.$$

In questa Nota mi son proposto di cercare, sempre per via intrinseca e nel caso dei moti interni stazionarî, gli assi permanenti di rotazione e di studiare dettagliatamente qualche caso particolare, ed ho ottenuto, in modo molto rapido e semplice, oltre le notevoli proprietà stabilite dal Volterra [2], altre proprietà non prive d'interesse.

1. Cono degli assi permanenti. — Tenendo presente la (3) si comprende che per avere un asse permanente di rotazione è necessario che sia costante il vettore Ω, ossia $d\Omega/dt = 0$; allora dalla (1'), tenendo presente la (2), si ricava

$$(4) \qquad \Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}_i) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad (4') \quad \Omega \wedge \mathbf{K} = 0 .$$

Reciprocamente, se la (4) è soddisfatta, si deduce $d\Omega/dt = 0$. Si può dunque concludere che «*la retta* $O\Omega$ *è asse permanente di rotazione quando e solo quando coincide con la retta* OK *che è fissa nello spazio e parallela al vettore* $\alpha\Omega + \mathbf{M}_i$ *dell'impulso totale del sistema*». Ora la retta OK e quindi l'asse permanente di rotazione varia al variare delle condizioni iniziali del moto, ma è facile trovare il luogo di tutti questi assi. Infatti, moltiplicando scalarmente la (4) per $\mathbf{M}_i$, si ha $\Omega \wedge \alpha\Omega \times \mathbf{M}_i = 0$, onde si conclude che gli assi permanenti corrispondenti alle diverse condizioni iniziali, appartengono al cono quadrico

$$(5) \qquad (P - O) \wedge \alpha(P - O) \times \mathbf{M}_i = 0 .$$

Per trovare la grandezza ω della velocità angolare corrispondente ad un asse permanente di rotazione, indico con $\mathbf{u}$ un vettore unitario parallelo all'asse stesso e quindi al vettore costante $\mathbf{K}$: allora, per la (4), ω deve soddisfare alla relazione $\omega\mathbf{u} \wedge (\omega\alpha\mathbf{u} + \mathbf{M}_i) = 0$, ossia, eliminando un fattore

[1] L'espressione «vettore costante» equivale a «vettore le cui coordinate sono costanti rispetto ad assi fissi, nella comune accezione meccanica dell'appellativo fisso».

[2] Ved. loc. cit. nella Nota precedente.

e sviluppando, $\omega \mathbf{u} \wedge \alpha \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{M}_i = 0$ da cui, indicando con $\mathbf{a}$ un vettore arbitrario, però non complanare con $\mathbf{u}$ ed $\alpha \mathbf{u}$, si ricava

$$\omega = \frac{\mathbf{M}_i \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{a}}{\mathbf{u} \wedge \alpha \mathbf{u} \times \mathbf{a}}. \tag{6}$$

Nel caso in cui l'asse $O\mathbf{M}_i$ dei moti interni coincida con un asse permanente di rotazione, si ha $\mathbf{M}_i \wedge \mathbf{u} = 0$ e quindi, per la (6), anche $\omega = 0$.

2. Relazione fra gli assi permanenti di rotazione ed i punti multipli della polodia — È bene premettere che la polodia, essendo l'intersezione di due quadriche [1], è una quartica gobba di 1ª specie e non può quindi avere, a meno che si spezzi, che un solo punto multiplo necessariamente doppio, poichè, se ne avesse due, allora, come è ben noto e si vede subito, la quartica si spezzerebbe in due coniche passanti naturalmente per questi punti doppî. Ciò premesso, osservo che un punto doppio della polodia si ha evidentemente quando risultano tangenti fra loro le due quadriche la cui intersezione forma la polodia stessa, cioè i due ellissoidi (v. loc. cit.) ad assi paralleli

$$(P - O) \times \alpha (P - O) = 1 \tag{7}$$ $$(P - O_1) \times \alpha^2 (P - O_1) = \frac{K^2}{2h}, \tag{8}$$

dove

$$O_1 = O - \frac{\alpha^{-1} \mathbf{M}_i}{\sqrt{2h}} \tag{9}$$

e la tangenza ha luogo quando le normali in P a queste due quadriche coincidono. Ora le normali in P agli ellissoidi (7) e (8) hanno rispettivamente le direzioni dei vettori $\alpha(P - O)$ e $\alpha^2(P - O_1)$, perciò, applicando l'omografia α^{-1}, dovranno essere paralleli fra loro i vettori $P - O$ ed $\alpha(P - O_1)$. Ma, per la (9), $\alpha(P - O_1) = \alpha(P - O) + \mathbf{M}_i/\sqrt{2h}$; quindi, tenendo anche presente che

$$\Omega = \sqrt{2h}\,(P - O) \quad \text{(v. loc. cit.)}, \tag{10}$$

si può dire che dovranno essere paralleli fra loro i vettori Ω ed $\alpha\Omega + \mathbf{M}_i$, che cioè deve essere $\Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}_i) = 0$.

Questa condizione coincide con la (4) che caratterizza le rotazioni permanenti, quindi si ha che « *la congiungente del baricentro del sistema con un punto doppio della polodia è un asse permanente di rotazione* ».

È importante osservare che ha luogo la proprietà inversa. Infatti, se la detta condizione sussiste, i vettori Ω ed $\alpha\Omega + \mathbf{M}_i$ sono paralleli, perciò lo sono pure i vettori $P - O$ ed $\alpha(P - O_1)$ e quindi anche i vettori

[1] Ved. loc. cit.

$\alpha(P - O)$ ed $\alpha^2(P - O_1)$, onde gli ellissoidi (7) e (8) sono tangenti in P e quindi P è un punto doppio della polodia.

Siccome poi, come si è visto nel n. 1, l'asse permanente deve coincidere colla retta OK, si può dire che « *i punti doppî della polodia cadono nei due punti intersezione dell'ellissoide d'inerzia con la retta fissa* OK ». Se la polodia non si spezza, allora, come si è già osservato, uno solo di questi punti è doppio ed è il punto di contatto degli ellissoidi (7) ed (8). È inoltre interessante rilevare che l'equazione (1'), che caratterizza il moto, è anche soddisfatta sostituendo contemporaneamente ad $\Omega(t)$ il vettore $-\Omega(T + t)$ ed al vettore $\mathbf{M}_i$ il suo opposto $-\mathbf{M}_i$. Ciò significa che « *i moti interni del sistema sono invertibili, purchè si inverta l'asse dei moti interni* ».

Supponendo che la polodia abbia un punto doppio P_0, se dopo il tempo T da che è incominciato il moto il polo giungesse in P_0, allora, invertendo il moto, il polo dovrebbe tornare al punto di partenza dopo il tempo T; ma, essendo P_0 un punto doppio, l'asse e la velocità corrispondenti sono permanenti, quindi il polo non potrebbe più muoversi da P_0. Si ha dunque che « *se la polodia ha un punto doppio, il polo di rotazione si avvicinerà ad esso indefinitamente senza raggiungerlo mai* ». Da quanto si è detto nella Nota precedente (loc. cit.) si può anche dedurre che « *se la polodia ha un punto doppio, il polo di rotazione si avvicinerà ad esso con velocità che tende a zero* ».

Si ha dunque una differenza essenziale tra i moti che hanno luogo quando la polodia ha punti doppî e quando non ne ha: « *nei primi il polo di rotazione non tornerà al punto di partenza ma tenderà asintoticamente verso il punto doppio; nei secondi, invece, il polo tornerà al punto di partenza* ».

3. Assi permanenti e polodia in alcuni casi particolari. — Supponendo $\mathbf{M}_i = 0$ (caso di Eulero) la (4) porge subito la relazione $\Omega \wedge \alpha\Omega = 0$ la quale mostra che Ω deve essere *direzione unita* per la dilatazione α e viceversa. Quindi si ha che « *l'asse* $O\Omega$ *è asse permanente di rotazione quando e solo quando coincide con uno degli assi principali d'inerzia* ».

Suppongo ora che l'*ellissoide d'inerzia si riduca ad una sfera*, allora l'omografia α si riduce ad una *omotetia vettoriale*, cioè ad un numero A che deve essere positivo, e le (7), (8) e (9) diventano rispettivamente:

$$(7')\quad (P - O)^2 = \frac{1}{A}\,; \qquad (8')\quad (P - O_1)^2 = \frac{K^2}{2h \,.\, A^2}\,; \qquad (9')\quad O_1 = O - \frac{\mathbf{M}_i}{A\sqrt{2h}}.$$

Poichè le (7') e (8') sono sfere e la congiungente dei loro centri coincide coll'asse $O\mathbf{M}_i$, come si vede dalla (9'), si trae che « *la polodia è, in tal caso, una circonferenza il cui centro giace sull'asse dei moti interni ed il cui piano è normale a questo asse, onde si ha che il cono mobile* *degli assi istantanei di rotazione è un cono di rotazione di asse* $\mathrm{O}\mathbf{M}_i$ ». Questi risultati ed altri ancora si possono trovare per altra via. Osservo, per questo, che le equazioni (1'), (2), (3) diventano, nel caso in esame,

$$(1_1')\quad \mathrm{A}\frac{d\Omega}{dt}+\Omega\wedge\mathbf{M}_i=0\;;\qquad (2_1)\quad \mathrm{A}\Omega+\mathbf{M}_i=\mathbf{K}\;;\qquad (3_1)\quad \mathrm{A}\Omega^2=2h\,.$$

La (3_1) mostra che il vettore Ω, e quindi $\mathrm{A}\Omega$, conserva modulo costante durante il moto; si ha quindi che « *la velocità angolare della rotazione istantanea ha, per tutta la durata del moto, la grandezza costante* $\omega=\sqrt{(2h/\mathrm{A})}$ *e quindi il moto è uniforme* ». Ponendo poi $\mathrm{U}-\mathrm{O}=\mathbf{K}$, $\mathrm{V}-\mathrm{O}=\mathrm{A}\Omega$, $\mathrm{W}-\mathrm{O}=\mathbf{M}_i$, si deduce, per la (2), $\mathrm{U}-\mathrm{V}=\mathbf{M}_i$, e si vede subito che i lati del triangolo OUV hanno lunghezze costanti e, poichè la retta OU è fissa nello spazio, si conclude che « *durante il moto del corpo il triangolo* OUV *ruota rigidamente intorno all'asse* OK, *quindi il luogo delle rette* OV, *cioè il cono fisso degli assi istantanei di rotazione, è un cono di rotazione di asse* OK ». Inoltre, poichè durante il moto la retta OV fa angolo costante con OW, si trae che « *il luogo delle rette* OV *rispetto al corpo mobile, cioè il cono mobile degli assi istantanei di rotazione, è un cono di rotazione di asse* $\mathrm{O}\mathbf{M}_i$ ». I due coni considerati si toccano lungo la generatrice comune $\mathrm{O}\Omega$ ed il piano tangente comune è perpendicolare al piano OUV. Dalla (10) si ricava poi

$$(11)\qquad \mathrm{P}=\mathrm{O}+\frac{\Omega}{\sqrt{2h}}$$

e questo punto P descrive l'erpolodia e la polodia, perciò si vede che « *l'erpolodia e la polodia sono circonferenze descritte rispettivamente intorno ad* OK *e ad* $\mathrm{O}\mathbf{M}_i$ *come assi* ». Le velocità di P, considerato come mobile, sull'erpolodia e sulla polodia sono notoriamente eguali ed il loro valore comune si ricava dalla (11) e dalla (1') e vale

$$\frac{d\mathrm{P}}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2h}}\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{1}{\mathrm{A}\sqrt{2h}}\Omega\wedge\mathbf{M}_i=-\frac{2s}{\mathrm{A}^2\sqrt{2h}}\mathbf{v}$$

dove s è l'area del triangolo OUV, e $\mathbf{v}$ è un vettore unitario normale al piano del triangolo. Si ha dunque che « *la velocità con cui* P *descrive la polodia (o l'erpolodia) è costante ed eguale a* $2s/\mathrm{A}^2\sqrt{2h}$ ». Per calcolare le *velocità angolari* dei moti di P sull'erpolodia e sulla polodia, basta, p. es., osservare che esse sono eguali alla grandezza della velocità del punto V [che vale A mod $(d\Omega/dt)$ ossia, per la $(1_1')$, mod $(\Omega\wedge\mathbf{M}_i)$ cioè $2s/\mathrm{A}$] divisa rispettivamente per la distanza di V dalla retta OK e dalla retta $\mathrm{O}\mathbf{M}_i$, queste distanze valgono rispettivamente $2s/\mathrm{mod}\,\mathrm{K}$ e $2s/\mathrm{mod}\,\mathbf{M}_i$, quindi le richieste velocità hanno rispettivamente i valori mod $\mathbf{K}/\mathrm{A}$ e mod $\mathbf{M}_i/\mathrm{A}$.

Per determinare poi gli assi permanenti di rotazione basta ricorrere alla (4′) ed osservare che la (4) si riduce ad $\Omega \wedge \mathbf{M}_i = 0$. Risulta immediatamente che « *l'asse* $O\Omega$ *è asse permanente di rotazione, quando e solo quando coincide con l'asse* $O\mathbf{M}_i$ *dei moti interni il quale, a sua volta, deve coincidere con l'asse* OK *che è fisso nello spazio* ».

Inoltre, da quanto si è detto nel n. 2, sui punti multipli della polodia, segue che la retta OK, che ora contiene i centri delle sfere (7′) e (8′), passa per il punto di contatto di queste che risultano perciò tangenti fra loro, onde si ha che « *la polodia, come pure l'erpolodia, si riduce all'unico punto di contatto di tali sfere* ». Si può anche dimostrare facilmente tenendo conto delle (2_1) e (3_1) che « *le sfere* (7′) e (8′) *sono tangenti fra loro internamente e che la prima è interna alla seconda* ».

Fisica. — *Sulla scoperta delle leggi delle variazioni adiabatiche dello stato gazoso.* Nota II di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna [1].

Poisson (Ann. de ch. et de ph., maggio 1823) subito dopo la pubblicazione del XII libro della *Meccanica celeste* di Laplace, che egli cita, calcola il fattore $1 + \alpha\omega/(1 + \alpha\theta)\gamma$ della sua formula (2) coi risultati delle esperienze di Clément e Desormes e dimostra che esso si riduce a c_p/c_v e dimostra così il teorema di Laplace senza ricorrere ad ipotesi sulla natura del calore, basandosi unicamente sui risultati delle esperienze.

Nella stessa Memoria egli considera il seguente ciclo di operazioni (forse il primo esempio di questo genere di ragionamenti) alle quali suppone sottoposto 1 grammo d'aria: 1°) Questa viene riscaldata di dT_p a pressione costante ricevendo una quantità di calore $c_p dT_p$ e subendo un aumento di volume ∂v_p; 2°) dopo viene compressa adiabaticamente di un volume dv_q uguale a dv_p, dimodochè essa riprende il volume iniziale mentre si riscalda di dT_q; 3°) finalmente essa viene raffreddata di $dT_p + dT_q$ a volume costante e perde la quantità di calore $c_v(dT_p + dT_q)$ ritornando alla temperatura, volume e quindi anche pressione iniziali.

Poichè l'aria è ritornata allo stato primitivo, il calore ricevuto e quello perduto devone essere uguali, cioè deve essere:

$$c_p\, dT_p = c_v(dT_q + dT_p)\,, \quad \text{ossia} \quad k = 1 + \frac{dT_q}{dT_p}\,.$$

Ma dalla $pv = RT$ si ha $dT_p = pdv_p/R = -\,pdv_q/R$, poichè s'è fatto $dv_q = -\,dv_p$, e quindi si ha:

$$k - 1 + \frac{R}{p}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q = 0 \qquad k - 1 + \frac{v}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q = 0\,,$$

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1917.