ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Per determinare poi gli assi permanenti di rotazione basta ricorrere alla (4') ed osservare che la (4) si riduce ad $\Omega \wedge \mathbf{M}_i = 0$. Risulta immediatamente che « *l'asse* $O\Omega$ *è asse permanente di rotazione, quando e solo quando coincide con l'asse* $O\mathbf{M}_i$ *dei moti interni il quale, a sua volta, deve coincidere con l'asse* OK *che è fisso nello spazio* ».

Inoltre, da quanto si è detto nel n. 2, sui punti multipli della polodia, segue che la retta OK, che ora contiene i centri delle sfere (7') e (8'), passa per il punto di contatto di queste che risultano perciò tangenti fra loro, onde si ha che « *la polodia, come pure l'erpolodia, si riduce all'unico punto di contatto di tali sfere* ». Si può anche dimostrare facilmente tenendo conto delle (2_1) e (3_1) che « *le sfere* (7') e (8') *sono tangenti fra loro internamente e che la prima è interna alla seconda* ».

Fisica. — *Sulla scoperta delle leggi delle variazioni adiabatiche dello stato gazoso.* Nota II di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna [1].

Poisson (Ann. de ch. et de ph., maggio 1823) subito dopo la pubblicazione del XII libro della *Meccanica celeste* di Laplace, che egli cita, calcola il fattore $1 + \alpha\omega/(1+\alpha\theta)\gamma$ della sua formula (2) coi risultati delle esperienze di Clément e Desormes e dimostra che esso si riduce a c_p/c_v e dimostra così il teorema di Laplace senza ricorrere ad ipotesi sulla natura del calore, basandosi unicamente sui risultati delle esperienze.

Nella stessa Memoria egli considera il seguente ciclo di operazioni (forse il primo esempio di questo genere di ragionamenti) alle quali suppone sottoposto 1 grammo d'aria: 1°) Questa viene riscaldata di dT_p a pressione costante ricevendo una quantità di calore $c_p dT_p$ e subendo un aumento di volume ∂v_p; 2°) dopo viene compressa adiabaticamente di un volume dv_q uguale a dv_p, dimodochè essa riprende il volume iniziale mentre si riscalda di dT_q; 3°) finalmente essa viene raffreddata di $dT_p + dT_q$ a volume costante e perde la quantità di calore $c_v(dT_p + dT_q)$ ritornando alla temperatura, volume e quindi anche pressione iniziali.

Poichè l'aria è ritornata allo stato primitivo, il calore ricevuto e quello perduto devone essere uguali, cioè deve essere:

$$c_p\, dT_p = c_v(dT_q + dT_p)\,, \quad \text{ossia} \quad k = 1 + \frac{dT_q}{dT_p}\,.$$

Ma dalla $pv = RT$ si ha $dT_p = pdv_p/R = -pdv_q/R$, poichè s'è fatto $dv_q = -dv_p$, e quindi si ha:

$$k - 1 + \frac{R}{p}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q = 0 \qquad k - 1 + \frac{v}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q = 0\,,$$

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1917.

ossia sottintendendo che q è costante:

$$(k-1)\frac{dv}{v}+\frac{dT}{T}=0, \tag{7}$$

da cui integrando e poscia sostituendo pv/R a T, Poisson ricava:

$$v^{k-1}\,T = \text{costante} \quad , \quad pv^k = \text{costante}.$$

Questo ragionamento non può dirsi inesatto, tutt'al più è incompleto; siccome l'aria fa un lavoro nella prima operazione (dilatazione isobarica) e ne subisce un altro (compressione adiabatica) nella seconda, è opportuno avvertire che la differenza dei due lavori è un infinitesimo di 2° ordine (¹).

Ivory (Philosophical Magazine, 1827) fece obbiezioni al ragionamento ed alla formula di Poisson e dimostrò invece una formula diversa.

Avogadro (Mem. dell'Acc. delle Scienze di Torino, vol. 33, 1829) esamina le dimostrazioni di Poisson e di Ivory, attribuisce in parte la diversità dei risultati a quella delle quantità considerate, ma dimostra che la formula di Ivory non è esatta che nel caso di piccole variazioni, ed allora diviene approssimativamente uguale a quella di Poisson.

Plana (Mem. dell'Acc. delle Sc. di Torino, serie II, vol. V, 1843) considera le diverse espressioni di dq in funzione di dp, dv, dT e delle derivate parziali di q e dimostra in modo ineccepibile l'equazione (7) di Poisson, col procedimento che ora si usa per ottenere le relazioni fra le diverse derivate parziali di q (Chwolson, Lehrbuch der Physik, vol. III, pag. 442).

(¹) Questo ragionamento è molto simile a quello che ho proposto recentemente (Rend. Lincei, maggio 1914) per dedurre l'espressione di k dall'esperienza di Clément e Desormes, avvertendo che non lo ritenevo nuovo ma piuttosto dimenticato.

Siccome per comodità dell'esposizione elementare le variazioni di temperatura erano piccole ma non infinitesime, l'uguaglianza fra i due lavori suddetti non è più così rigorosa e un'avvertenza in proposito (che venne trascurata o dimenticata) sarebbe stata opportuna, sebbene non fosse indispensabile perchè evidente.

Si noti che l'errore che risulta dall'aver supposto nulla questa differenza è necessario per ottenere la solita espressione di k che è approssimativa e non potrebbe esser ottenuta con un ragionamento rigoroso; in principio o in fine o nel mezzo di questo deve essere introdotta l'approssimazione o deviazione dal rigore assoluto.

Si noti anche che le integrazioni che si effettuano in tutte le dimostrazioni della formula di Poisson suppongono che l'equazione differenziale che s'integra, rimanga valida in tutte le fasi del passaggio dall'uno all'altro limite dell'integraztone, cioè che in tutte queste fasi la pressione interna sia sempre uguale all'esterna; esse dunque suppongono implicitamente che il passaggio si effettui reversibilmente. Siccome nell'esperienza di Clément e Desormes la variazione di volume se è lentissima non è adiabatica, se è rapidissima non è reversibile, ne segue che la formula di Poisson non è rigorosamente applicabile e s'illude chi crede che il valore esatto di k sia quello « in funzione dei logaritmi delle pressioni ».

Ammettendo queste come note e dT come funzione di dp, dq, dv, si ha:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q + \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_v \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q + \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_v \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p$$

ossia:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q + \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p$$

ossia:

$$k - 1 + \frac{v}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q = 0$$

come aveva trovato Poisson.

Poisson inoltre (Ann. de ch. et de ph., ottobre 1823) ottiene l'equazione (4) in modo quasi identico a quello usato da Laplace, deducendola dalle definizioni (rigorose e generali) di c_p e c_v. Egli pone:

$$(8) \qquad \begin{aligned} c_p &= \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{v}{T}\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p \\ c_v &= \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{p}{T}\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v \end{aligned} \quad [1];$$

dividendo una per l'altra queste due eguaglianze, indicando con k il rapporto c_p/c_v ottiene

$$(4) \qquad kp + \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v = v\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p$$

e supponendo k costante ed integrando, ottiene come Laplace

$$q = f(pv^k)$$

dove f è una funzione arbitraria. Da questa equazione per q costante egli deduce la formula $pv^k =$ costante.

[1] Anche a Poisson, che pure cercava l'espressione di q, è sfuggito che da queste sue definizioni risulta che q non è funzione di p, v, T. Da esse difatti si ottiene:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p = c_p \frac{T}{v} = c_p \frac{p}{R} = k\frac{c_v}{T} \qquad \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v = c_v \frac{T}{p} = c_v \frac{v}{R}.$$

Differenziando la prima equazione rispetto a p, la seconda rispetto a v, e siccome dalla esperienza risulta che c_p e k e quindi c_p e c_v sono costanti, si ha:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial v\,\partial p} = \frac{kc_v}{R} \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial p\,\partial v} = \frac{c_v}{R}$$

l'ordine delle differenziazioni influisce sul risultato, dunque q non è funzione di p, v, T. Evidentemente Poisson ha creduto superflua questa verificazione e non si è curato di farla.

Questa è la dimostrazione che egli riproduce nel II volume del suo trattato di Meccanica, citata senza osservazioni dal Clausius (Abhandlungen, vol. I, pag. 46) riprodotta pure senza osservazioni dal Mach e da Von Lang; non può dirsi che essa sia meno esatta di quella di Laplace perchè non ne differisce; non è probabile che contenga un errore evidente perchè i suddetti autori non ne fanno cenno.

Nè Laplace nè Poisson fanno cenno del metodo d'integrazione dell'equazione a derivate parziali di 1° ordine semplicissima; si deve dunque supporre che essi seguano un metodo ben noto, e ciò conferma l'uso che entrambi fanno della funzione arbitraria (integrale generale), ma si può supporre che questo metodo non sia applicabile nel caso attuale perchè q non è funzione di p, v, T (ciò che Laplace e Poisson ignoravano), ma invece è dq funzione di dp, dv, $d\mathrm{T}$; però questa difficoltà non sussiste. Difatti non si può dubitare della relazione usitatissima:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v dp + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p dv = dq$$

ed a questa paragonando l'equazione generale da integrare:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v \mathrm{A} + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p \mathrm{B} = \mathrm{C}$$

che deve esserle identica, si ricava

$$\frac{dp}{\mathrm{A}} = \frac{dv}{\mathrm{B}} = \frac{dq}{\mathrm{C}}$$

le due solite equazioni da cui si ricavano direttamente i due integrali particolari. Nel caso attuale essendo:

$$kp\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v - v\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p = 0$$

si ricava

$$\frac{dp}{p} = k\frac{dv}{v} = \frac{dq}{0}.$$

I primi due membri dànno l'integrale $pv^k =$ costante, il terzo con uno qualsiasi dei primi due dà l'altro integrale particolare $q = 0$, ed il primo è quello che vale nel caso presente nel quale invece l'integrale generale $q = f(pv^k)$ non è ammissibile, perchè suppone che q possa ritenersi uguale a qualunque funzione di pv^k, mentre invece q non può essere uguale a nessuna funzione di p e v neppure quindi di pv^k.

Alla stessa relazione $pv^k =$ costante si giunge più semplicemente ponendo nella (9) $dq = 0$, portando il secondo termine nel secondo membro e dividendo per la (4) ed integrando [1].

Concludendo, mi pare che Laplace e Poisson abbiano contribuito a gara ed in misura pressochè uguale alla formula della velocità del suono ed a quella delle variazioni adiabatiche.

Laplace ha ottenuto due equazioni dalle quali appare o si deduce facilmente una delle formule adiabatiche, ma di esse non si è occupato, e difatti neppure si è curato di dare il facile integrale della (6) che è appunto la prima formula. Poisson invece ha cercato ed ottenuto due delle formule adiabatiche (da cui facilmente si deduce la terza) mediante due ragionamenti, uno dei quali fu già usato da Laplace. A me parrebbe che autore delle formule debba dirsi Poisson che le ha cercate e trovate e non Laplace che avrebbe potuto trovarle, ma non se ne è occupato.

Fisica. — *Dimostrazione sperimentale della costanza di velocità della luce riflessa da uno specchio in moto.* Nota di QUIRINO MAJORANA, presentata dal Socio P. BLASERNA [2].

Mi riferisco a quanto ho esposto in una precedente Nota, e indico ora il metodo adottato e i risultati ottenuti, studiando il valore della lunghezza d'onda di un raggio di luce monocromatica, riflesso da uno specchio in moto. Ricordo anzitutto che molti sono i lavori teorici sull'argomento, e fra essi cito quelli di Abraham, Plank, Edser, Larmor, Brown, Harnack. Essi fanno del problema sia uno studio puramente geometrico, sia un'applicazione della teoria elettromagnetica.

Senza entrare nella discussione di tali studî, possiamo accettare le conclusioni di Harnack [3] circa la frequenza delle vibrazioni riflesse da uno specchio in moto uniforme. Sia v la velocità di questo normalmente al suo piano, contata positivamente verso la sorgente; c la velocità del raggio di

[1] Non mi pare che si possa dire che in forza del principio dell'equivalenza, dq non è un differenziale esatto, ma piuttosto che esso dà l'espressione analitica di dq e da questa con la nota regola di calcolo differenziale si riconosce se dq è, oppure non è, un differenziale esatto. Così p. es. nel caso importantissimo della fusione o solidificazione, se il corpo non è volatile e trovasi nel vuoto, oppure se la variazione di volume è nulla, la forma primitiva del suddetto principio $dq = du + pdv$ ci dà $dq = du$ e quindi esso c'insegna che dq è un differenziale esatto, perchè lo è du.

Così pure nel caso delle variazioni adiabatiche di stato per un corpo qualunque siccome $dq = 0$, sarà $\partial^2 q/\partial p \partial v = 0 = \partial^2 q/\partial v \partial p$, quindi dq è un differenziale esatto.

[2] Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1917.

[3] Ann. d. Phys., 1912, 39, pag, 1053; 1915, 46, pag. 547.