ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

		Pentosani
	Lignite xiloide (Campalli Castelline Chianti) . . .	3.86 %
	Lignite picea compatta (Poggio Mirteto Roccantica) .	0.3056 »
	Lignite picea compatta (Pietrafitta Perugia)	0.3356 »
	Lignite-carbone (Ribolla) Société générale des lignites en Italie	0.00 »
Miniere di Sardegna	Bacu Abis	0.00 »
Miniere di Sardegna	» Derna	0.00 »
Miniere di Sardegna	» Rodi.	0.00 »
Miniere di Sardegna	» Ferruccio	0.00 »
	Legno di quercia (*quercus robur*)	18.42 »
	Legno di Pitch-pine (*Pinus rigida*)	8.72 »

Sui furfurogeni e sulla loro sorte nella utilizzazione industriale dei nostri combustibili fossili sarà argomento nella prossima Nota; frattanto dai dati soprariferiti risulta che la quantità dei pentosani è inversamente proporzionale al grado di carbonizzazione dei combustibili fossili, come si verifica pei metossili ed a guisa di questi, vanno scomparendo nelle ligniti brune compatte, per essere poi nulli nei carboni sardi.

Meccanica celeste. — *Ricerche sopra le perturbazioni del satellite di Nettuno.* Nota IV di G. ARMELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

1. Caso III. SATELLITE PERTURBATORE INTERNO ($a' < a$). — Passiamo ora ad esaminare il caso in cui l'ipotetico satellite perturbatore sia interno, cioè più vicino a Nettuno del satellite noto. Conserveremo gli stessi simboli adottati nelle precedenti Note [2] e porremo $\frac{a'}{a} = \beta$, donde $\beta < 1$. Tenendo presente la teoria dello Charlier [3], le equazioni (15), (9) e (11) della Nota II si modificheranno ora in

$$m \operatorname{sen} i = m' \sqrt{\beta} \operatorname{sen} i' \tag{1}$$

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{n^2}{n'^2}} \tag{2}$$

$$\left\{ m \sqrt[3]{\frac{n^2}{n'^2}} + m' \frac{n}{n'} \right\} \lambda(\beta) = -\frac{\pi}{n'} \frac{d\omega'}{dt} = -\frac{\pi}{n'} \frac{d\omega}{dt} \tag{3}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1917.

(2) Cfr. Rendiconti Lincei, 1915, 1° sem., pag. 569; 1916, 2° sem., pag. 433; 1917, 2° sem., pag. 94.

(3) Cfr. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, T. I, pp. 274, 346, 348 e 361.

giacchè, riferendoci noi al piano invariabile, si ha, per il teorema di Jacobi, $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega'}{dt}$.

Da queste tre equazioni, abbiamo:

$$\frac{\lambda(\beta)}{\sqrt{\beta}} = -\pi \frac{\frac{d\omega}{dt}}{mn\left\{1 + \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} i'}\right\}}. \tag{4}$$

Ciò fatto, sostituiamo al posto di π, $\frac{d\omega}{dt}$, m, n, i, i loro valori numerici e supponiamo al solito che l'inclinazione i' non sia troppo grande, avendosi p. es. $i' \leqq 30°$. La (4) si trasformerà allora nell'ineguaglianza:

$$\frac{\lambda(\beta)}{\sqrt{\beta}} \leqq 0{,}16079. \tag{5}$$

2. Nella Nota II (¹) dimostrammo che, nell'intervallo $0 \leqq \beta \leqq 1$, $\lambda(\beta)$ è una funzione crescente dell'argomento. Vogliamo ora far vedere che questa proprietà (prendendo $\sqrt{\beta}$ col segno positivo) vale anche per la funzione

$$\mathrm{L}(\beta) = \frac{\lambda(\beta)}{\sqrt{\beta}} = \tag{6}$$

$$= \frac{1}{(1-\beta^2)\sqrt{\beta}}\left\{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}\, d\vartheta - \int_0^{\pi/2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2\operatorname{sen}^2\vartheta}}\right\}.$$

Derivando, infatti, si ha

$$\mathrm{L}'(\beta) = \frac{2\beta\lambda' - \lambda}{2\beta\sqrt{\beta}}; \tag{7}$$

dalla quale valendoci dell'ineguaglianza (21) dimostrata nella Nota seconda, cioè:

$$\lambda' > \frac{2\beta+\beta^3}{(1-\beta^2)^3}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\beta^2\operatorname{sen}^2\vartheta}\, d\vartheta \tag{8}$$

risulta sostituendo per $\lambda(\beta)$ il suo valore:

$$\mathrm{L}'(\beta) > \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}(1-\beta^2)^3}\Bigg[(4\beta^2+2\beta^4)\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\beta^2\operatorname{sen}^2\vartheta}\, d\vartheta - \tag{9}$$

$$-(1-\beta^4)\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\beta^2\operatorname{sen}^2\vartheta}\, d\vartheta + (1-\beta^2)^2\int_0^{\pi/2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2\operatorname{sen}^2\vartheta}}\Bigg] >$$

$$> \frac{4\beta^4+2\beta^2}{2\beta\sqrt{\beta}(1-\beta^2)^3}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\beta^2\operatorname{sen}^2\vartheta}\, d\vartheta > 0.$$

(¹) Nota II, n. 7. Questi Rendiconti, 1916, 2° sem., pag. 437.

Ne segue quindi che, nell'intervallo $0 \leq \beta \leq 1$, se $\sqrt{\beta}$ si sceglie positiva [1], anche la derivata $L'_1(\beta)$ sarà positiva, ciò che dimostra la nostra asserzione.

Osserveremo ancora che $\lambda(\beta)$ è regolare nell'intorno del punto $\beta = 0$, e può quindi essere sviluppata in quell'intorno in serie di Mac-Laurin.

Eseguendo il calcolo vediamo che $\lambda(\beta)$ presenta ivi uno zero di secondo ordine. Ne segue che anche $L(\beta)$ si annullerà per $\beta = 0$.

D'altra parte è facile vedere che $L(\beta)$ diviene infinita per $\beta = 1$.

Riepilogando dunque *possiamo asserire che* $L(\beta)$ *nell'intervallo*

$$0 \leq \beta \leq 1,$$

è una funzione crescente dell'argomento, la quale si annulla nell'estremo inferiore e diviene infinita nell'estremo superiore.

3. Da questa proprietà possiamo trarre un'importante conseguenza, vale a dire che l'ineguaglianza (5) può essere invertita; o, in altre parole, che *l'ineguaglianza* (5) *determina un limite superiore per* β.

Eseguendo il calcolo numerico, con metodi analoghi a quelli di Newton ed Horner per le equazioni algebriche, abbiamo:

$$\beta \leq 0{,}1601\,; \tag{10}$$

da cui, ricordando che la distanza media a del satellite noto è uguale a 13,33, risulta:

$$a' \leq 2{,}138. \tag{11}$$

Abbiamo così trovata la massima distanza media ammissibile dell'ipotetico satellite da Nettuno, nel caso in cui esso si supponga interno.

Il minimo valore di a' è evidentemente $a' = 1$, cioè il semidiametro equatoriale di Nettuno. Dalla (3) si ha poi:

$$m' = -\pi \frac{d\omega/dt}{n\lambda(\beta)} - \frac{m}{\sqrt{\beta}} = \frac{0{,}00007268}{\lambda(\beta)} - \frac{0{,}000291}{\sqrt{\beta}}. \tag{12}$$

4. Riepilogando dunque quanto abbiamo trovato rispetto alla posizione dell'ipotetico satellite perturbatore, possiamo distinguere *due zone di possibile esistenza* separate tra loro da una terza zona che chiameremo « *zona lacunare* » e cioè:

A) Zona esterna. — Essa si estende da $a' = \infty$ ad $a' = 31{,}84$. Come vedemmo, se il satellite perturbatore si trovasse in questa zona, il *minimo* valore della sua massa sarebbe $\mu = 0{,}000104$ e la sua grandezza

[1] Osserviamo che se n ed n' fossero di segno contrario occorrerebbe prendere $\sqrt{\beta}$ negativo.

fotometrica G = 14,34. *Ci sembra quindi di poter escludere che l'ipotetico satellite esista in questa zona.*

B) Zona lacunare. — Essa si estende da $a' = 31,84$ ad $a' = 2,138$. *In questa zona il satellite perturbatore non può certamente trovarsi*; ben inteso supponendo l'eccentricità piccola e l'inclinazione $i' \leqq 30°$.

C) Zona interna. — Essa si estende da $a' = 2,138$ ad $a' = 1$. Esaminando la (12) si scorge immediatamente che in questa zona la massa m' del satellite perturbatore è funzione *decrescente* della sua distanza media a'. Servendoci della (12) ed eseguendo i calcoli numerici, purtroppo assai lunghi e penosi, abbiamo infine la seguente

Tabella.

a'	m'	m'/m	G	$\Delta^{('')}$	a'	m'	m'/m	G	$\Delta^{('')}$
1,200	0,00278	9,553	11,96	0'',22	1,800	0,00084	2,883	12,81	0'',89
1,400	0,00183	6,294	12,26	0'',45	2,000	0,00056	1,917	13,12	1'',12
1,600	0,00130	4.474	12,51	0'',67	2,138	0,00042	1,427	13,33	1'',29

In questa tavola abbiamo indicato con $\Delta^{('')}$ la massima distanza apparente, in secondi d'arco, dell'ipotetico satellite dall'orlo del disco planetario, quando Nettuno è all'opposizione; G è la grandezza fotometrica.

5. Se esaminiamo ora questa tabella, ci convinceremo che è assai poco probabile che il satellite perturbatore esista in questa zona. Infatti, se noi ammettiamo che esso sia molto vicino a Nettuno, la sua massa diviene rilevante rispetto a quella del satellite noto; ed allora probabilmente esso sarebbe stato qualche volta osservato. Se, invece, lo supponiamo più lontano dal pianeta, le sue condizioni di visibilità risulterebbero assai migliorate; e, data la sua grandezza fotometrica, esso sarebbe stato certamente scoperto da molto tempo.

6. Si potrebbe estendere questo studio al caso di forti eccentricità ed inclinazioni; ma, data la poca probabilità di questa ipotesi, una tale ricerca avrebbe più della virtuosità che dell'interesse astronomico. *Concludendo dunque, crediamo di poter affermare che l'ipotesi di Struve, che attribuisce le perturbazioni del satellite di Nettuno all'attrazione di un secondo satellite sconosciuto, deve essere abbandonata. Resta quindi come unica teoria, degna da seguirsi, quella di Newcomb e Tisserand; la quale, come è notissimo, fa dipendere queste perturbazioni dal rigonfiamento equatoriale di Nettuno.*

E. M.