

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

apparire identici nelle loro manifestazioni anche se la quantità di materia che contengono è leggermente diversa (elementi isotopici) e viceversa, anche contenendo le stesse quantità di materia, se la struttura e la forma sono diverse, due elementi possono essere diversi, malgrado l'identità del peso atomico.

Le proprietà degli elementi non sono soltanto una funzione del loro peso atomico, come credeva Mendelejeff, ma altresì della loro intima struttura.

Matematica. — *Ricerche in analisi estensiva.* Nota della dottoressa ROSARIA GIORDANO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA ⁽¹⁾.

1. In uno spazio ad n dimensioni S_n di Grassmann, siano assegnate s formazioni $A_1, A_2, \dots, A_s$ rispettivamente degli ordini $h_1, h_2, \dots, h_s$, per modo che sia sempre

$$(1) \quad h_j + h_k \geq n + 1 \quad (j, k = 1, 2, \dots, s);$$

esse avranno in comune una formazione X_p dell'ordine

$$(2) \quad p = h_1 + h_2 + \dots + h_s - (s - 1)(n + 1)$$

che qui vogliamo esprimere per mezzo degli elementi (*punti*) determinativi delle formazioni A . La questione, abbastanza interessante pel maneggio rapido dell'analisi grassmanniana, non venne ancora risolta con una formula unica che fornisse senz'altro il risultato finale delle successive operazioni: *sezione* di A_1 con A_2 , *sezione* del risultato ottenuto con A_3 , e così via via fino alla *sezione* del penultimo risultato con A_s .

Anzi, se si pensa che, a voler trattare la questione con l'analisi ordinaria, occorrono s gruppi di $n + 1$ espressioni lineari con r termini ciascuna ($r = h_1, h_2, \dots, h_s$) formate con gli r punti che servono di determinazione ad A_r ; e che poi occorre cercare (ciò che non è ovvio) per quali valori dei parametri indeterminati di ogni gruppo, le espressioni corrispondenti diventano identiche ⁽²⁾, cosa che, del resto, non venne ancora nemmeno fatta, si vedrà dal risultato che qui presentiamo, ancora una volta, come ogni formula di cui venga ad arricchirsi l'analisi grassmanniana, rappresenti un vero contributo anche al trattamento con la maggiore speditezza delle questioni fondamentali di geometria iperspaziale fatte col tramite di un calcolo.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1917.

⁽²⁾ Per vedere a quali difficoltà materiali si va incontro, si può confrontare ad es. pel solo caso di $s = 2$ il § III della Memoria del prof. D'Ovidio: *Le funzioni metriche fondamentali* ecc. (Atti della R. Acc. dei Lincei, 1876-77).

2. Per motivi di opportunità e di generalità, supporremo la formazione A_i come risultante dal prodotto di h_i punti rappresentati coi simboli $i^{(1)}$, $i^{(2)}$, ..., $i^{(h_i)}$, si tratta di esprimere $X_{\rho} = \prod_{i=1}^{i=s} i^{(h_1)} i^{(h_2)} \dots i^{(h_i)}$ come *esistente* in (*partecipante* di) qualcuna delle $A_1, A_2, \dots, A_s$ ⁽¹⁾, per es. A_r , con operazioni eseguite sui punti $i^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, h_i$; $i = 1, 2, \dots, s$).

Poichè ha luogo la (1), le differenze $h_i + h_j - (n + 1)$ sono tutte positive o nulle, e tutte non inferiori al numero ρ ; e d'altra parte quando si sia posto $h'_i = n + 1 - h_i$ per tutti i valori di i da 1 ad s , si potrà sempre portare A_r ad essere l'ultima dei fattori del prodotto da formare, poichè ciò equivarrà a moltiplicare X_{ρ} per $(-1)^{\xi_r}$ con

$$(3) \quad \xi_r = (h'_{r+1} + h'_{r+2} + \dots + h'_s) h'_r = h'_r \sum_{r+1}^s h'_i.$$

3. Ciò posto, d'una maniera generica si dicano

$$(4) \quad l_1 l_2 \dots l_{g_i}, \quad l_{g_i+1} l_{g_i+2} \dots l_{h_i}$$

due permutazioni complementari dei numeri $1, 2, \dots, h_i$, i cui elementi si trovino ordinati come nella permutazione principale, di classi rispettivamente $g_i, h_i - g_i$, e tali che, posto convenzionalmente $g_1 = 0$, sia per tutti i valori di i da 1 ad s ,

$$h_i - g_i + g_{i+1} = n + 1,$$

ovvero

$$(5) \quad g_{i+1} = n + 1 - h_i + g_i = h'_i + g_i:$$

si avranno, per ogni valore di i , $q_{i-1} = \binom{h_i}{g_i}$ coppie di tali permutazioni; sicchè, indicando con η_{i-1} il numero delle inversioni che gli elementi della $l_1 l_2 \dots l_{g_i}$ fanno con quelli della $l_{g_i+1} l_{g_i+2} \dots l_{h_i}$, cioè il numero

$$(6) \quad \eta_{i-1} = l_1 + l_2 + \dots + l_{g_i} - \frac{1}{2} g_i (g_i - 1)$$

si hanno nella

$$(7) \quad A_i = (-1)^{\eta_{i-1}} i^{(l_1)} i^{(l_2)} \dots i^{(l_{g_i})} \cdot i^{(l_{g_i+1})} i^{(l_{g_i+2})} \dots i^{(l_{h_i})}$$

q_{i-1} espressioni diverse della formazione A_i , anche per $i = 1$ se, insieme alla convenzione $g_1 = 0$, si ritiene l'altra $\eta_0 = 0$ (ciò che porta per q_0 il valore 1).

(1) Qualche cosa, come si vede, di analogo al noto principio di trasporto, del quale il prof. Del Re già fece diverse applicazioni [cfr. ad es. i suoi lavori: *Sopra alcune formule fondamentali nell'analisi spaz. ad n dimensioni di Grassmann* (Rend. Acc. Napoli, 1911); *Formule per trasformare con omografie estensive formazioni d'ordine qualunque* (ibid., 1916)].

4. Ne segue che se noi, per esprimere d'una maniera concisa, il prodotto degli elementi della formazione A_i corrispondenti alla permutazione $l_{g_i+1} l_{g_i+2} \dots l_{h_i}$ per gli elementi della formazione A_j ($j > i$) corrispondenti alla permutazione $l_1 l_2 \dots l_{g_j}$, con

$$(8) \quad h_i - g_i + g_j = n + 1$$

scriviamo $P_{g_j}(i, j)$, dove, tenuti fissi i, j , il simbolo ha tanti valori quanti ne indica il prodotto $q_{i-1} q_{j-1} = \binom{h_i}{g_i} \binom{h_j}{g_j}$ perchè tanti sono i modi in cui $h_i - g_i$ elementi di A_i possono farsi seguire da g_j elementi di A_j , si potranno, in una maniera altrettanto concisa scrivere i prodotti $A_1 A_2, A_1 A_2 A_3, \dots$, ed avere:

$$A_1 A_2 = \sum_{q_1} (-1)^{\eta_1} P_{g_2}(1, 2) \cdot 2^{(l_{g_2+1})} 2^{(l_{g_2+2})} \dots 2^{(l_{h_2})},$$

$$A_1 A_2 A_3 =$$

$$= \sum_{q_1} (-1)^{\eta_1} P_{g_2}(1, 2) \sum_{q_3} (-1)^{\eta_3} P_{g_3}(2, 3) \cdot 3^{(l_{g_3+1})} 3^{(l_{g_3+2})} \dots 3^{(l_{h_3})}, \dots;$$

ovvero, d'una maniera generale,

$$(9) \quad X_p = \sum_{q_1} (-1)^{\eta_1} P_{g_2}(1, 2) \sum_{q_2} \dots \sum_{q_{s-1}} (-1)^{\eta_{s-1}} \times \\ \times P_{g_s}(s-1, s) \cdot s^{(l_{g_s+1})} s^{(l_{g_s+2})} \dots s^{(l_{h_s})}.$$

Ma questa forma di scrittura che, quantunque al seguito del simbolo introdotto riesce ad abbreviare di molto l'espressione del prodotto $A_1 A_2 \dots A_s$, è ancora lunga perchè possa, senza perdere in chiarezza e semplicità, prestarsi a dare il prodotto stesso nella forma, in cui A_r sia in ultimo posto, e tanto meno nella forma quale risulterebbe dal prendere per le $A_1, A_2, \dots, A_s$ una loro permutazione qualunque fra le $s!$ possibili. Ad ovviare un tale inconveniente, ho trovato opportuno introdurre un nuovo simbolo, col chiamare

$$E(1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, s)$$

l'espressione essenzialmente numerica:

$$(10) \quad \sum_{q_1} (-1)^{\eta_1} P_{g_2}(1, 2) \sum_{q_2} (-1)^{\eta_2} P_{g_3}(2, 3) \dots \sum_{q_{r-1}} (-1)^{\eta_{r-1}} \times \\ \times P_{g_{r+1}}(r-1, r+1) \sum_{q_{r+1}} \dots \sum_{q_{s-1}} (-1)^{\eta_{s-1}} P_{g_s}(s-1, s)$$

nella quale i sommatorii, a cominciare da dritta, hanno rispettivamente le estensioni date dai relativi indici inferiori.

Con ciò il prodotto $A_1 A_2 \dots A_s$ si presenta allora nella forma

$$(11) \quad A_1 A_2 \dots A_s = (-1)^{\sum r} E(1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, s) \times \\ \times \sum_{q_r} (-1)^{\eta_r} P_{q_r}(s, r) \cdot r^{(l_{g_r+1})} r^{(l_{g_r+2})} \dots r^{(l_{h_r})}$$

valida, e con significato ben determinato, per tutti i valori di r da 1 ad s .

5. Per rendersi conto del valore numerico che ha la (10) e quindi del valore effettivo che compete al simbolo $E(1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, s)$, basta cercare il valore numerico che è rappresentato dal simbolo $P_{q_j}(i, j)$; ora è ovvio trovare questo valore numerico. In fatti, se le coordinate rispetto ad una piramide $e_1 e_2 \dots e_{n+1}$ di elementi unitarii indipendenti dell'elemento $i^{(x)}$ della formazione A_i vengono dette

$$(12) \quad i_{x,1}, i_{x,2}, \dots, i_{x,n+1} \quad (x = 1, 2, \dots, h_i)$$

e quelli dell'elemento $j^{(y)}$ della formazione A_j le diciamo

$$(13) \quad j_{y,1}, j_{y,2}, \dots, j_{y,n+1} \quad (y = 1, 2, \dots, h_j)$$

si trova essere

$$(14) \quad P_{g_j}(i, j) = \begin{vmatrix} i_{g_i+1,1} & i_{g_i+1,2} & \dots & i_{g_i+1,n+1} \\ i_{g_i+2,1} & i_{g_i+2,2} & \dots & i_{g_i+2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i_{h_i,1} & i_{h_i,2} & \dots & i_{h_i,n+1} \\ j_{1,1} & j_{1,2} & \dots & j_{1,n+1} \\ j_{2,1} & j_{2,2} & \dots & j_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ j_{g_j,1} & j_{g_j,2} & \dots & j_{g_j,n+1} \end{vmatrix},$$

dove circa g_i e g_j regge la (8).

6. Analogamente alle (12), (13) indicando con

$$r_{z,1}, r_{z,2}, \dots, r_{z,n+1} \quad (z = 1, 2, \dots, h_r)$$

le coordinate dell'elemento $r^{(z)}$ rispetto alla $e_1 e_2 \dots e_{n+1}$, si trovano, dalla espressione (11) del prodotto $A_1 A_2 \dots A_s$ come *coordinate* di questo pro-

dotto considerato nella formazione A_r e rispetto alla piramide $r^{(1)} r^{(2)} \dots r^{(h_r)}$ di A_r , i numeri che si hanno dalla

$$(-1)^{\xi_r} E(1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, s) \times \\ \times \sum_{q_r} (-1)^{\eta_r} P_{g_r}(s, r) \begin{vmatrix} r_{l_{g_r+1,1}} & r_{l_{g_r+1,2}} & \dots & r_{l_{g_r+1,n+1}} \\ r_{l_{g_r+2,1}} & r_{l_{g_r+2,2}} & \dots & r_{l_{g_r+2,n+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{l_{h_r,1}} & r_{l_{h_r,2}} & \dots & r_{l_{h_r,n+1}} \end{vmatrix}$$

quando nel $\sum$ si considerano quei determinanti che nelle varie matrici figuranti a dritta [matrici, sia detto per ricordo, corrispondenti alle varie permutazioni di classe $h_r - g_r$ giusta le (4) per $i = r$] occupano eguale posto.

Al mio illustre maestro prof. A. Del Re, per l'indicazione del soggetto e pei suoi frequenti consigli che mi resero possibile trattarlo in una maniera così *economica* ed *elegante* nella forma, e così *ricca di contenuto*, devo qui significare i miei sentimenti della più viva gratitudine e riconoscenza.

Matematica. — *Il rango di una matrice di Riemann*. Nota di GAETANO SCORZA, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO ⁽¹⁾.

Per determinare in modo preciso le funzioni abeliane non singolari a moltiplicazione complessa ⁽²⁾ ho avuto bisogno di approfondire in qualche punto la teoria generale delle matrici di Riemann; nel tempo stesso mi è stato necessario ricorrere a un ordine di considerazioni che mi ha condotto a riconoscere e poi a sfruttare largamente un legame assai intimo fra codesta teoria e quella delle algebre associative ⁽³⁾ a un numero qualunque di unità.

Rimandando le dimostrazioni a una Memoria un po' ampia che sarà pubblicata altrove, raccolgo qui gli enunciati dei nuovi teoremi a cui sono pervenuto, alcuni dei quali sembrano singolarmente semplici ed eleganti.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1917.

⁽²⁾ Vedi su questo proposito la Nota preventiva presentata in questi stessi giorni all'Accademia di Parigi: *Les fonctions abeliennes non singulières à multiplication complexe*.

⁽³⁾ Per brevità di discorso, qui e nel seguito, sull'esempio dei matematici inglesi e nord-americani, dico algebra a più unità ciò che altri direbbe sistema di numeri iper-complessi o di numeri complessi a più unità. E poichè nel caso nostro non vi è luogo a considerare algebre non associative, nel testo si dirà brevemente algebra invece di algebra associativa.