ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

dotto considerato nella formazione A_r e rispetto alla piramide $r^{(1)} r^{(2)} \dots r^{(h_r)}$ di A_r, i numeri che si hanno dalla

$$(-1)^{\xi_r} E(1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, s) \times$$
$$\times \sum_{q_r} (-1)^{\eta_r} P_{g_r}(s, r) \begin{vmatrix} r l_{g_r+1,1} & r l_{g_r+1,2} & \dots & r l_{g_r+1,n+1} \\ r l_{g_r+2,1} & r l_{g_r+2,2} & \dots & r l_{g_r+2,n+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ r l_{h_r,1} & r l_{h_r,2} & \dots & r l_{h_r,n+1} \end{vmatrix}$$

quando nel $\sum$ si considerano quei determinanti che nelle varie matrici figuranti a dritta [matrici, sia detto per ricordo, corrispondenti alle varie permutazioni di classe $h_r - g_r$ giusta le (4) per $i = r$] occupano eguale posto.

Al mio illustre maestro prof. A. Del Re, per l'indicazione del soggetto e pei suoi frequenti consigli che mi resero possibile trattarlo in una maniera così *economica* ed *elegante* nella forma, e così *ricca di contenuto*, devo qui significare i miei sentimenti della più viva gratitudine e riconoscenza.

Matematica. — *Il rango di una matrice di Riemann.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrisp. G. Castelnuovo [1].

Per determinare in modo preciso le funzioni abeliane non singolari a moltiplicazione complessa [2] ho avuto bisogno di approfondire in qualche punto la teoria generale delle matrici di Riemann; nel tempo stesso mi è stato necessario ricorrere a un ordine di considerazioni che mi ha condotto a riconoscere e poi a sfruttare largamente un legame assai intimo fra codesta teoria e quella delle algebre associative [3] a un numero qualunque di unità.

Rimandando le dimostrazioni a una Memoria un po' ampia che sarà pubblicata altrove, raccolgo qui gli enunciati dei nuovi teoremi a cui sono pervenuto, alcuni dei quali sembrano singolarmente semplici ed eleganti.

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1917.

(2) Vedi su questo proposito la Nota preventiva presentata in questi stessi giorni all'Accademia di Parigi: *Les fonctions abéliennes non singulières à multiplication complexe.*

(3) Per brevità di discorso, qui e nel seguito, sull'esempio dei matematici inglesi e nord-americani, dico algebra a più unità ciò che altri direbbe sistema di numeri ipercomplessi o di numeri complessi a più unità. E poichè nel caso nostro non vi è luogo a considerare algebre non associative, nel testo si dirà brevemente algebra invece di algebra associativa.

In essi gioca in modo essenziale la nozione di *rango* di una matrice riemanniana che qui per la prima volta viene definita e utilizzata; e che è dedotta appunto — il nome stesso lo dice — da una nozione fondamentale e ben nota delle algebre a più unità.

Sorge così un nuovo carattere (intero) delle matrici riemanniane, invariante di fronte alla relazione di (equivalenza o, più in generale, di) isomorfismo, che sembra non meno notevole di quelli già introdotti nei miei lavori precedenti.

1. Sia ω una matrice riemanniana di genere p, con gli indici di singolarità e moltiplicabilità k e h, e sia $[\omega]$ l'insieme di tutte le matrici quadrate d'ordine $2p$, a elementi razionali, rispondenti alle omografie riemanniane di ω.

Poichè queste omografie stanno tutte in un sistema lineare ∞^h e formano un gruppo, segue subito che:

L'insieme $[\omega]$ può considerarsi come un'algebra ad $h+1$ unità nel corpo dei numeri razionali. Essa è dotata di modulo, e questo è fornito dalla matrice identica d'ordine $2p$.

2. Come è noto, un'algebra si dice *primitiva* se un prodotto di suoi elementi è nullo quando e solo quando è nullo uno (almeno) dei suoi fattori.

Un elemento di un'algebra si dice *pseudo-nullo* se non è nullo, ma è nulla qualche sua potenza; e un'algebra si dice *pseudo-nulla*, se ogni suo elemento non nullo è pseudo-nullo.

Una *sotto-algebra* B di un'algebra A si dice *invariante* (in A) se contiene i prodotti di ogni suo elemento per un elemento qualunque di A, qualsiasi l'ordine in cui tal prodotto viene effettuato.

Un'algebra si dice *semi-semplice* se non contiene sotto-algebre invarianti pseudo-nulle; *semplice* se non contiene alcuna sotto-algebra invariante.

Un'algebra C è la *somma diretta* di due altre algebre A e B, se ogni elemento di C è la somma di un elemento di A con un elemento di B, e il prodotto di due elementi qualsiansi, scelti l'uno in A e l'altro in B, è nullo qualunque sia l'ordine in cui viene effettuato.

Quando un'algebra può esser considerata come la somma diretta di due altre, essa si dice anche *riducibile*.

3. Ciò posto, le proprietà fondamentali dell'algebra $[\omega]$ connessa con la matrice ω sono fornite dai seguenti teoremi:

L'algebra $[\omega]$ è semi-semplice qualunque sia la matrice ω; è semplice se (e soltanto se) la matrice ω non ammette assi isolati: è primitiva se (e soltanto se) la matrice ω è pura.

Inoltre:

L'algebra $[\omega]$ è riducibile quando e solo quando ω ammette assi isolati; e possiede elementi pseudo-nulli quando e solo quando ω è impura e possiede infiniti assi distinti.

4. Sia A un elemento non nullo di $[\omega]$ ed A^* la corrispondente omografia riemanniana di ω; sia infine I il modulo di $[\omega]$, cioè la matrice identica d'ordine $2p$.

Diremo *rango*, tanto di A quanto di A^*, il minimo intero positivo m per cui accade che gli elementi

$$I, A, A^2, \ldots, A^{m-1}, A^m$$

di $[\omega]$ siano (linearmente dipendenti secondo numeri razionali, e quindi senz'altro, trattandosi di matrici ad elementi razionali) linearmente dipendenti.

Al variare di A entro $[\omega]$ l'intero m non resta in generale costante; ma esso ammette in ogni caso un massimo finito ϱ, il così detto rango di $[\omega]$, che verrà detto il *rango* della matrice ω.

Codesto carattere di ω, invariante di fronte alle relazioni di equivalenza e di isomorfismo, è soggetto evidentemente alle seguenti diseguaglianze:

$$\varrho \geq 1 \quad , \quad \varrho \leq h+1 \quad , \quad \varrho \leq 2p \, ;$$

ed:

È $\varrho = 1$ *quando e solo quando è* $h = 0$ (*e quindi anche* $k = 0$).

A titolo di esemplificazione giova osservare che:

Una matrice riemanniana ellittica è del rango 1 *o* 2 *secondo che per essa l'indice di moltiplicabilità è* 0 *o* 1;

che:

Una matrice riemanniana del genere 2 *è del rango* 1, 2, 3 *o* 4 *secondo che* (*adoperando una classificazione adottata nella mia Memoria inserita nel vol. 41 dei Rendiconti di Palermo*) *essa è*

α) *del tipo* I); *oppure*

β) *del tipo* II), III), VII) *e* VIII); *oppure*

γ) *del tipo* IV); *oppure, infine,*

δ) *del tipo* V), VI) *o* IX);

e che:

Una matrice riemanniana impura del genere p *priva di assi isolati i cui assi puri siano tutti ellittici è del rango* p *o* $2p$ *secondo che non è od è ad indici massimi.*

5. In alcuni degli esempî precedenti, che potrebbero essere facilmente moltiplicati, si hanno altrettante conferme delle seguenti proposizioni fondamentali:

Se la matrice ω *è composta con due o più altre matrici riemanniane, il rango di* ω *è la somma dei ranghi di queste*;

e:

Se la matrice ω *è priva di assi isolati, il suo rango* ϱ *è un divisore comune di* $h+1$ *e* $2p$.

Si ha inoltre che:

Se la matrice ω è priva di assi isolati, la sua omografia riemanniana generica è generale e i suoi spazi fondamentali sono tutti della stessa dimensione. Inoltre se questa dimensione è ν, si ha:

$$(\nu + 1)\varrho = 2p.$$

Se la matrice ω è pura, il teorema è suscettibile di una determinazione assai maggiore; può dirsi infatti che:

Se la matrice ω è pura, ogni sua omografia riemanniana è generale. Gli spazi fondamentali di una tale omografia hanno tutti la stessa dimensione; e se ν è la dimensione comune degli spazi fondamentali di un'omografia sì fatta non nulla e di rango m, si ha:

$$(\nu + 1)\, m = 2p \text{ [1]}.$$

6. Una conseguenza assai notevole di queste proposizioni, poste a riscontro coi teoremi del n. 7, è quella riguardante l'indice di moltiplicabilità di una matrice pura il cui genere sia un numero primo.

Precisamente si ha che:

L'indice di moltiplicabilità di una matrice riemanniana pura del genere p, se p è un numero primo, non può essere che 0, 1, $p-1$ *o* $2p-1$.

In particolare:

Il numero base di Hurwitz di una curva di genere p, priva di sistemi regolari di integrali riducibili, nell'ipotesi che p sia un numero primo, non può essere che 1, 2, p *o* $2p$ [2].

7. Se la matrice ω non è singolare, ogni sua omografia riemanniana non nulla è necessariamente principale.

Si vede inoltre che una tale omografia, ove non sia identica, ha due soli spazi fondamentali di dimensione $p-1$, e quindi:

[1] Avendo avuto occasione verso la fine di agosto u. s. di comunicare al Rosati questo teorema, egli mi ha risposto di averne già osservata la prima parte in un lavoro che sarà presentato nel prossimo novembre all'Accademia delle Scienze di Torino e il cui manoscritto è stato spedito al prof. Segre fin dal mese di luglio. In questo egli si occupa di corrispondenze situate su curve algebriche e quindi, in sostanza, di matrici riemanniane legate a curve; ma la proprietà in discorso è di natura generale, e tale è pure la dimostrazione del Rosati che coincide con quella mia.

Anche il fatto algebrico rispondente alla seconda parte del teorema è stato rilevato dal Rosati sebbene, com'egli mi ha scritto, non abbia avuto occasione di interpretarlo geometricamente e di valersene in codesto suo lavoro.

[2] Se $p = 2$, questi quattro valori si riducono a tre e si ritrova un risultato dovuto al Rosati. Vedi la sua Memoria: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due* [Annali di Matematica pura e dapplicata, serie 3ª, vol. XXV (1915), pp. 1-32].

Una matrice riemanniana non singolare o è del rango 1 *o è del rango* 2.

In base a questa proposizione, poichè le matrici di rango 1 sono quelle a indici nulli, la classificazione delle matrici di Riemann non singolari rientra, sostanzialmente, in quella delle matrici di Riemann a rango 2.

Ebbene, quest'ultima è fornita dal seguente notevole teorema:

Le matrici riemanniane di rango 2 *sono tutte e sole le matrici di Riemann per cui gli indici di singolarità e moltiplicabilità* k *e* h *sono dati da*:

I) $k=0$ *e* $h=1$;

II) $k=0$ *e* $h=3$;

III) $k=1$ *e* $h=1$; *o infine da*

IV) $k=2$ *e* $h=3$.

Quelle per cui valgono le alternative I) *e* II) *sono certo pure e col genere diverso da* 2; *quelle per cui valgono le alternative* III) *e* IV) *possono essere pure od impure e quindi le matrici in discorso si distribuiscono in sei tipi distinti.*

Infine il caso IV) *non può verificarsi che per matrici di genere pari, e il caso* II) *non può verificarsi che per matrici di genere pari e maggiore di* 2.

A complemento di questo teorema giova osservare che:

Se una matrice di Riemann del rango 2 *ha per genere* p, *gli spazi fondamentali delle sue omografie riemanniane (non nulle e non identiche) sono due* S_{p-1} *fissi, imaginari coniugati o reali secondo che essa presenta l'aspetto* I) *o l'aspetto* III); *sono invece gli* S_{p-1} *di una* V_p^p *razionale normale reale di Segre priva affatto di punti reali o dotata di infiniti punti reali secondo che la matrice presenta l'aspetto* II) *o* IV).

Un'immediata conseguenza della penultima proposizione enunciata è la seguente:

Le curve algebriche, tali che il grado dell'equazione minima della corrispondenza algebrica generica situata sopra una qualunque di esse sia 2, *sono tutte e sole quelle curve algebriche per cui i numeri base* μ, μ_1 *e* μ_2 ($\mu=\mu_1+\mu_2$) *di Hurwitz e di Rosati, cioè i numeri base di tutte le corrispondenze algebriche situate sulla curva, di quelle simmetriche o di quelle emisimmetriche, sono dati da*

I) $\mu=2$, $\mu_1=1$, $\mu_2=1$;

II) $\mu=4$, $\mu_1=1$, $\mu_2=3$;

III) $\mu=2$, $\mu_1=2$, $\mu_2=0$;

IV) $\mu=4$, $\mu_1=3$, $\mu_2=1$.

8. Prima di chiudere questo rapido riassunto, non voglio omettere di fare un'osservazione che per qualche quistione può riuscire non del tutto inutile.

Ho già avuto occasione di far rilevare come spesso, per passare dal discontinuo al continuo, convenga considerare *tutte le omografie* di una matrice di Riemann, anzi che le sole omografie riemanniane.

Ove ciò si faccia per la nostra matrice ω, si è costretti a introdurre per essa, oltre l'algebra $[\omega]$, due algebre ulteriori $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ che hanno con le sole omografie *reali* o con tutte le omografie di ω la stessa relazione che l'algebra $[\omega]$ ha con le sue omografie riemanniane.

Le algebre $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ sono definite, rispettivamente, nel corpo dei numeri reali e in quello dei numeri complessi ordinarî e possono riguardarsi, adoperando una frase molto suggestiva del Cartan, come due *prolungamenti* successivi dell'algebra $[\omega]$.

I ranghi di $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ eguagliano entrambi quello di $[\omega]$ cioè di ω; ed un importante teorema dello Wedderburn, assicura subito, grazie a una proposizione enunciata più sopra nel n. 3, che anche $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ sono, al pari di $[\omega]$, semisemplici qualunque sia la matrice ω.

È chiaro, poi, che $[\omega]''$ è primitiva quando e solo quando ω è ad indici nulli, e risulta infine dalle cose dette che $[\omega]'$ è primitiva quando e solo quando ω non è singolare.

Ma su questo mi propongo di ritornare più minutamente se il seguito delle ricerche consiglierà di approfondire lo studio delle algebre $[\omega]'$ ed $[\omega]''$.

Cinetica chimica. — *Studî di cinetica chimica* (1). Nota di U. Pratolongo (2).

Gli svolgimenti chimico-cinetici, sia di carattere termodinamico (van 't Hoff, Arrhenius, Trautz) che di carattere dinamico-molecolare (Jäger, Goldschmidt, Berthoud) ebbero sinora carattere prevalentemente induttivo.

L'esame critico del problema aveva già ripetutamente indicato che la soluzione di essa non poteva scendere che da una termodinamica generale, che, a differenza della termodinamica classica, comprendesse tutti i termini del problema; guidato da una felice intuizione, R. Marcelin (3) ha per la

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Scuola superiore di agricoltura di Milano.

(2) Riassunto di un lavoro pubblicato integralmente nel Journal de Chimie Physique, vol. 15, 1917 (v. la relazione della Commissione esaminatrice in questi Rendiconti, vol. 26, I, pag. 623).

(3) *Contribution à l'étude de la cinétique physico-chimique*, Thèse, Paris, 1914. In questo lavoro sono raccolte e svolte le idee che l'autore aveva precedentemente accen-