

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a piè di pagina la data d'arrivo)

Matematica. — *Nuove applicazioni di una formola commutativa.* Nota del Socio GIAN ANTONIO MAGGI ⁽¹⁾.

1. La formola accennata è quella a cui è dedicata una mia recente Nota, inserita in questi Rendiconti ⁽²⁾. Mi permetto di ritornare, con questa, su tale argomento, per alcuni complementi e alcune aggiunte, che reputo meritevoli d'interesse.

Abbiasi, come nella suddetta Nota, una superficie, σ , generalmente regolare; indichi n la misura del segmento di normale al punto generico, contato dal piede, positivamente da una parte convenuta; u, v una coppia di coordinate curvilinee, ortogonali, atte a individuare i punti della superficie; e sia, col significato consueto dei simboli,

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Posto

$$\lim_{n>0} - \lim_{n<0} = D$$

e inteso che φ , funzione dei punti dello spazio, e quindi delle coordinate u, v, n degli stessi punti, sia limitata e continua, unitamente colle sue de-

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1917.

⁽²⁾ *Sopra una formola commutativa e alcune sue applicazioni*, a pag. 189 del presente volume, 1° semestre.

rivate, fino a $\frac{\partial^{\mu+\nu} \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu}$, separatamente, dalle due parti della superficie, incluse le due pagine, corrispondenti ai due segni di n , si ha ⁽¹⁾

$$(1) \quad D \frac{\partial^{\mu+\nu} \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} D \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu},$$

donde segue, col consueto significato dei simboli ⁽²⁾,

$$(2) \quad D \frac{\partial^\mu \partial^\nu \varphi}{\partial s_u^\mu \partial s_v^\nu} = \frac{\partial^\mu \partial^\nu D \varphi}{\partial s_u^\mu \partial s_v^\nu}, \quad D \frac{\partial^\mu \partial^\nu \varphi}{\partial s_v^\nu \partial s_u^\mu} = \frac{\partial^\nu \partial^\mu D \varphi}{\partial s_v^\nu \partial s_u^\mu}.$$

D'altra parte, φ potrà ancora concepirsi come funzione di una terna di coordinate cartesiane ortogonali x, y, z , con che si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s_u} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s_u} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s_u} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s_u}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_u^2} &= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s_u} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s_u} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s_u} \right]^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial s_u^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial s_u^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial s_u^2}, \\ \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial \varphi}{\partial s_v} &= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s_u} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s_u} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s_u} \right] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s_v} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s_v} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s_v} \right] \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial x}{\partial s_v} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial y}{\partial s_v} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial z}{\partial s_v}, \end{aligned}$$

dove la notazione simbolica ha evidente significato, e le formole analoghe, che si ottengono scambiando u con v .

Combinando colle (2) le quali formole, applicate all'ipotesi che la direzione degli assi delle x e delle y sia quella della tangente, nel considerato punto limite della superficie, alla linea $u = \text{cost.}$ e alla linea $v = \text{cost.}$, con che

$$\frac{\partial x}{\partial s_u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s_u} = \frac{\partial z}{\partial s_u} = \frac{\partial^2 x}{\partial s_u^2} = \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial y}{\partial s_v} = 0,$$

⁽¹⁾ Nota citata.

⁽²⁾ Difatti, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_u} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial s_v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2}{\partial s_u^2} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v}, \\ \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial}{\partial s_v} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned}$$

e le formole analoghe, che si ottengono scambiando u con v . Notiamo che ne risulta

$$\frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial}{\partial s_v} - \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{\partial}{\partial s_u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v}.$$

e relazioni analoghe, si trovano immediatamente le seguenti formole, fondamentali per la nostra ricerca:

$$(3) \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial D \varphi}{\partial s_u} = \frac{\partial D \varphi}{\partial x}, \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial D \varphi}{\partial s_v} = \frac{\partial D \varphi}{\partial y},$$

$$(4) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 D \varphi}{\partial s_u^2} - \frac{\partial D \varphi}{\partial s_v} \frac{\partial^2 y}{\partial s_u^2} - D \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial s_u^2},$$

$$(5) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial D \varphi}{\partial s_v} - \frac{\partial D \varphi}{\partial s_u} \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial x}{\partial s_v} - D \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial z}{\partial s_v},$$

e le analoghe, che si ottengono, scambiando u con v , x con y .

Inoltre, ponendo in (3) $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ al posto di φ , se ne ricava

$$(6) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial n} = \frac{\partial}{\partial s_u} D \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial n} = \frac{\partial}{\partial s_v} D \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Donde, valendosi di

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y} Y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} Z,$$

dove X , Y , Z indicano i coseni di direzione della normale, presa col convenuto senso positivo, e invocando le stesse (3), si ricava, nella suddetta ipotesi (colla quale $X = Y = 0$, $Z = 1$, $\frac{\partial Z}{\partial s_u} = \frac{\partial Z}{\partial s_v} = 0$) ⁽¹⁾,

$$(7) \quad \begin{cases} D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial s_u} D \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial X}{\partial s_u} D \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial s_u} D \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial s_v} D \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial X}{\partial s_v} D \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial s_v} D \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{cases}$$

che completano il quadro.

2. Le precedenti formole si prestano alla deduzione della discontinuità, alla superficie σ , delle derivate prime tangenziali, e di tutte le derivate seconde, nelle due ipotesi della funzione potenziale di superficie

$$(8) \quad \varphi = \int_{\sigma} \frac{k d\sigma}{r},$$

⁽¹⁾ Per la stessa via, si stabilisce la formola

$$D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

che si presta pure ad utili applicazioni.

e della funzione potenziale di doppio strato

$$(9) \quad \varphi = \int_{\sigma} k \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma :$$

inteso che k vi rappresenti una funzione regolare delle coordinate curvilinee u, v . Con che è noto verificarsi, nella prima ipotesi, le eguaglianze

$$(10) \quad D\varphi = 0, \quad (11) \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -4\pi k,$$

e nella seconda

$$(12) \quad D\varphi = 4\pi k, \quad (13) \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Ammettiamo qua, come postulata, o verificata a parte, l'esistenza e la continuità delle derivate suddette, separatamente dalle due parti della superficie, le due pagine incluse.

3. Nella prima ipotesi, introducendo (10) nelle (3), si ha, in primo luogo,

$$(14) \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 :$$

e introducendo (10) e (11) in (4) e (5),

$$(15) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi k \frac{\partial^2 s}{\partial s_u^2}, \quad (16) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 4\pi k \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial s}{\partial s_v}.$$

Ora, indicando con ϱ_u e con R_u le misure del raggio di curvatura della linea $u = \text{cost.}$ e della sezione normale avente comune con essa la tangente, nel punto limite considerato, e inteso che sia $\varrho_u > 0$ e R_u positivo o negativo con Z , cioè secondo che il centro di curvatura della sezione normale si trova dalla parte del piano tangente verso cui la normale è presa come positiva, o dalla parte opposta, si ha, pel teorema di Meusnier,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial s_u^2} = \frac{Z}{\varrho_u} = \frac{1}{R_u}.$$

Si trova quindi la prima delle due formole

$$(17) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{4\pi k}{R_u}, \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{4\pi k}{R_v}.$$

Donde, in base a

$$D \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right) = 0,$$

si ricava, indicando con r_1, r_2 le misure dei raggi principali di curvatura, relativi al considerato punto (inteso il segno stabilito colla regola precedente)

$$(18) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi k \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

La (16) fornisce, alla sua volta ⁽¹⁾,

$$(19) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 4\pi k \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

Naturalmente, r_1, r_2 prendono il posto di R_u, R_v nelle (17), nell'ipotesi che le linee coordinate in discorso siano formate colle linee di curvatura, relative al punto considerato. E in questa stessa ipotesi, la (19) si riduce, per nota circostanza, a

$$(19)' \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Infine, introducendo (11) e (14) in (7), si ha

$$(20) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = -4\pi \frac{\partial k}{\partial s_u}, \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = -4\pi \frac{\partial k}{\partial s_v}.$$

OSSERVAZIONE. — Questi risultati si deducono dalle formole di Somigliana, relative ad una terna qualsivoglia di assi coordinati ortogonali, adattandole al nostro caso, e rammentando formole ben conosciute, relative alla curvatura delle linee tracciate sopra una superficie ⁽²⁾. È notevole che ciascuna delle (17) rappresenta l'estensione al caso di una linea qualsivoglia della superficie, passante pel punto limite, della formola più particolarmente stabilita pel caso di una linea di curvatura, semplicemente ottenuta coll'introdurre la sezione normale corrispondente alla linea considerata.

4. Nella seconda ipotesi, introducendo (12) in (3), si ha, in primo luogo,

$$(21) \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 4\pi \frac{\partial k}{\partial s_u}, \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4\pi \frac{\partial k}{\partial s_v};$$

⁽¹⁾ Cfr. la Nota (2) a pag. 202.

⁽²⁾ *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di superficie*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LI (1916). Sotto altra forma, le nostre sono le formole, dedotte, con metodo del tutto differente, da Poincaré, nella sua *Théorie du Potentiel Newtonien* (Paris, Carré et Naud, 1899, § 112); comprese le due ultime, stando in generale le relazioni indicate pel caso delle linee di curvatura. Cito tali formole, principalmente per questa avvertenza, non intendendo, del resto, inoltrarmi nella letteratura dell'argomento.

introducendo (12), (13) e (21) in (4), (5) e analoghe, si ha

$$(22) \quad \frac{1}{4\pi} D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 k}{\partial s_u^2} - \frac{\partial k}{\partial s_v} \frac{\partial^2 y}{\partial s_u^2}, \quad \frac{1}{4\pi} D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 k}{\partial s_v^2} - \frac{\partial k}{\partial s_u} \frac{\partial^2 x}{\partial s_v^2},$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial k}{\partial s_v} - \frac{\partial k}{\partial s_u} \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial x}{\partial s_v} = \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{\partial k}{\partial s_u} - \frac{\partial k}{\partial s_v} \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{\partial y}{\partial s_u} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial k}{\partial s_v} + \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{\partial k}{\partial s_u} \right] - \frac{k}{\partial s_u} \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial x}{\partial s_v} - \frac{\partial k}{\partial s_v} \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{\partial y}{\partial s_u}; \end{aligned} \right.$$

finalmente, introducendo (13) e (21) in (7),

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} &= - \frac{\partial X}{\partial s_u} \frac{\partial k}{\partial s_u} - \frac{\partial Y}{\partial s_u} \frac{\partial k}{\partial s_v}, \\ \frac{1}{4\pi} D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} &= - \frac{\partial X}{\partial s_v} \frac{\partial k}{\partial s_u} - \frac{\partial Y}{\partial s_v} \frac{\partial k}{\partial s_v}. \end{aligned} \right.$$

Si hanno poi dalla Geometria Differenziale le formole seguenti, dove il terzo membro vale per qualunque specie di coordinate curvilinee ortogonali, e il quarto nell'ipotesi che le linee coordinate siano formate colle linee di curvatura ⁽¹⁾,

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial s_v^2} &= - \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{\partial y}{\partial s_u} = - \frac{1}{2} \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial s_u} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{1}{r_2}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s_u^2} &= - \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial x}{\partial s_v} = - \frac{1}{2} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial s_v} = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{1}{r_1}, \end{aligned} \right.$$

e nel caso delle linee di curvatura ⁽²⁾

$$(26) \quad \frac{\partial X}{\partial s_u} = - \frac{1}{r_2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial s_u} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial s_v} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial s_v} = - \frac{1}{r_1},$$

per mezzo delle quali le formole (22), (23), (24) assumono immediatamente, nelle ipotesi medesime, la forma definitiva.

OSSERVAZIONE. — Formole nuove, per quanto consta all'autore, per la discontinuità delle derivate seconde della funzione potenziale di doppio strato furono date da Somigliana, in una sua recente Nota ⁽³⁾. Stando ai precedenti risultati, vanno recate a tali formole le modificazioni che risultano dal confronto colle nostre (22)-(26).

⁽¹⁾ Cfr. la Nota (2) a pag. 202 e Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale*, §§ 43, 55, 135.

⁽²⁾ Bianchi, op. cit., § 62.

⁽³⁾ *Sulle derivate seconde della funzione di doppio strato newtoniano*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LI (1916),