ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Proprietà invariantive degli hamiltoniani e dei gradienti nell'analisi generale di Grassmann.* Nota della dottoressa Rosaria Giordano, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Gli operatori che, sotto il nome di *hamiltoniani* e *gradienti*, il mio maestro prof. A. Del Re ha introdotti nell'analisi generale ad n dimensioni di Grassmann, dapprima con lezioni dettate nei suoi corsi di matematiche superiori, e poi con articoli comparsi nei Rend. della R. Accad. di Napoli [2], e nei Rend. della R. Accad. dei Lincei [3], godono della proprietà di essere degli invarianti *assoluti ortogonali*, cioè di non cambiare se, al sistema originario delle *unità* $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ di riferimento, se ne sostituisce un altro composto di *unità* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n+1}$ pure mutuamente normali (in altri termini, siffatti operatori sono indipendenti dal sistema *unitario-ortogonale* degli elementi di riferimento); e ciò sia che operino sopra funzioni scalari che sopra funzioni estensive. Questa interessante proprietà che, in seguito a suggerimenti e consigli dello stesso mio maestro, io ho qui provata, contiene, limitatamente al caso ovvio delle tre dimensioni e del corrispondente campo di vettori, la proprietà analoga dell'operatore $\triangle$ di Hamilton e del gradiente di Maxwell, che parecchi provarono con procedimenti non estendibili al caso generale qui considerato e nemmeno paragonabili, circa la semplicità e il carattere strettamente analitico, al modo di trattamento qui seguito per siffatto caso generale.

I lavori ai quali dovrò fare ricorso, oltre ai già citati, sono i seguenti che indicherò rispettivamente con (DR, I), (DR, II): Del Re, *Sopra alcune formule fondamentali nell'analisi generale ad n dimensioni di Grassmann* Rend. Accad. Napoli, 1911); idem, *Hamiltoniani e gradienti di formazioni estensive nell'analisi generale di Grassmann* (Rend. Accad. Lincei, settembre 1916).

Per quanto riguarda sia le definizioni che le notazioni mi riferisco interamente a quanto trovasi consegnato nei citati lavori del prof. Del Re. Così, ad es., scrivendo

$$(1) \qquad \Omega = \omega_1 \mathrm{E}_1 + \omega_2 \mathrm{E}_2 + \cdots + \omega_m \mathrm{E}_m \,, \quad m = \binom{n+1}{\varrho}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1917.

[2] *Gli hamiltoniani ed i gradienti nell'analisi generale ad n dimensioni di Grassmann* (Rend. sudd., Nota I e Nota II, che in appresso indicheremo con N. I e N. II, nel fascicolo luglio-ottobre 1916; *Gli ham. ed i grad. rispetto a formazioni non interamente libere* (idem, nov. dic. 1916).

[3] Cfr. fasc. dei mesi sett. ott. nov., 1916, 3 Note.

intendiamo che $E_1, E_2, \dots, E_m$ rappresentino i prodotti ϱ a ϱ degli $n+1$ vertici $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ della piramide di riferimento (i ϱ-spigoli di tale piramide) ordinati in una maniera prestabilita e da tener fissa nel periodo di uno stesso ragionamento; $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ sono delle grandezze scalari, ed Ω è la formazione che risulta, per via di addizione, dai prodotti $\omega_1 E_1$, $\omega_2 E_2, \dots, \omega_m E_m$.

1. Ciò premesso, sia U una funzione scalare delle $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ dalla cui variabilità dipende quella della formazione Ω, rispetto alla quale s'intendono presi l'hamiltoniano $\nabla_\Omega U$ e il gradiente $G_\Omega U$ della U. Se indichiamo con $E'_1, E'_2, \dots, E'_m$ le formazioni d'ordine ϱ, fatte con le unità $e'_1, e'_2, \dots, e'_{n+1}$ (i ϱ-spigoli della nuova piramide di riferimento $e'_1, e'_2, \dots, e'_{n+1}$), per la formola (2) della Nota testè citata (DR, I) si avrà:

$$\Omega = (\Omega | E'_1)\, E'_1 + (\Omega | E'_2)\, E'_2 + \cdots + (\Omega | E'_m)\, E'_m\,; \tag{2}$$

ovvero, dopo aver posto, per tutti i valori di i da 1 ad m,

$$\omega'_i = (\Omega | E'_i) \qquad (i = 1, 2, \dots, m): \tag{3}$$

$$\Omega = \omega'_1 E'_1 + \omega'_2 E'_2 + \cdots + \omega'_m E'_m\,. \tag{4}$$

Per mezzo delle (3) le $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ sono delle funzioni scalari delle $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_m$, e perciò la U è funzione di queste $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_m$.

Derivando quindi la U col teorema delle funzioni di funzioni, si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial \omega_r} = \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_1}\dfrac{\partial \omega'_1}{\partial \omega_r} + \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_2}\dfrac{\partial \omega'_2}{\partial \omega_r} + \cdots + \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_m}\dfrac{\partial \omega'_m}{\partial \omega_r} \\ \qquad\qquad (r = 1, 2, \dots, m)\,; \end{array} \right. \tag{5}$$

ovvero, visto che le (3), in forma sviluppata, possono essere scritte come segue, per $i = 1, 2, \dots, m$

$$\omega'_i = \omega_1 (E_1 | E'_i) + \omega_2 (E_2 | E'_i) + \cdots + \omega_m (E_m | E'_i)\,, \tag{6}$$

si avrà ancora

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial \omega_r} = \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_1}(E_r | E'_1) + \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_2}(E_r | E'_2) + \cdots + \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_m}(E_r | E'_m) \\ \qquad\qquad (r = 1, 2, \dots, m)\,. \end{array} \right. \tag{7}$$

Da queste deducesi, moltiplicando ordinatamente per $E_1, E_2, \dots, E_m$, sommando membro a membro, e tenendo conto che

$$(E_i | E'_r) = (E'_r | E_i) \qquad (i, r = 1, 2, \dots, m):$$

$$G_\Omega U = \frac{\partial U}{\partial \omega'_1} \sum_r (E'_1 | E_r)\, E_r + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \omega'_m} \sum_r (E'_m | E_r)\, E_r\,. \tag{8}$$

Ma, per la citata formula (2) del citato lavoro (DR, I), è:

$$(E'_i|E_1)\,E_1 + (E'_i|E_2)\,E_2 + \cdots + (E'_i|E_m)\,E_m = E'_i$$

$$(i = 1\,, 2\,, \ldots, m)\,;$$

dunque sarà

$$\text{(9)}\qquad G_\Omega U = \frac{\partial U}{\partial \omega'_1} E'_1 + \frac{\partial U}{\partial \omega'_2} E'_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \omega'_m}\,.$$

Dal confronto della espressione originaria

$$G_\Omega U = \frac{\partial U}{\partial \omega_1} E_1 + \frac{\partial U}{\partial \omega_2} E_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \omega_m} E_m$$

del $G_\Omega U$ con la (9) si vede che *il gradiente della funzione scalare* U *delle variabili* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, *coordinate della formazione* Ω *rispetto alla piramide* $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ *di riferimento, e il gradiente della* U *considerata quale funzione delle coordinate* $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_m$ *della stessa* Ω, *rispetto alla nuova piramide* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n+1}$ *di riferimento, sono un unico e medesimo ente.*

2. Se la funzione U è estensiva, nella forma, ad esempio che prendiamo dalla (DR II)

$$\text{(10)}\qquad U = U_1 \cdot F_1 + U_2 \cdot F_2 + \cdots + U_q \cdot F_q\,,$$

indicando con $F'_1, F'_2, \ldots, F'_q$ i σ-spigoli della nuova piramide $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n+1}$ [σ, rammentiamolo qui esplicitamente, è la specie della U, ed è $q = \binom{n+1}{\sigma}$], avremo:

$$\text{(11)}\qquad U = (U|F'_1)\,F'_1 + (U|F'_2)\,F'_2 + \cdots + (U|F'_q)\,F'_q\,,$$

epperò, ponendo

$$\text{(12)}\qquad (U|F'_i) = U'_i \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots, q),$$

sono le U'_i funzioni scalari delle $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ e quindi pure delle ω'_1, $\omega'_2, \ldots, \omega'_m$ quali sono date dalla (6). Indicando poi con $G_{\Omega'}U$ il gradiente di U quando ci riferiamo alla nuova piramide ed alla Ω così anch'essa riferita, cioè alla Ω espressa nella forma Ω' (diciamo) data dalla (4), avremo

$$\text{(13)}\qquad G_{\Omega'}U = (-1)^\theta (G_{\Omega'}U'_1 \cdot F'_1 + G_{\Omega'}U'_2 \cdot F'_2 + \cdots + G_{\Omega'}U'_q \cdot F'_q)$$

con $\theta = \varrho\sigma\,, \varrho\varrho'\,, \sigma\sigma'$, secondochè $\varrho + \sigma \lesseqgtr n + 1$.

Ora, per essere

$$|F'_i = (F'_i|F_1)|F_1 + (F'_i|F_2)|F_2 + \cdots + (F'_i|F_q)|F_q ,$$

per i da 1 a q, e quindi

$$(U|F_i) = \sum_r U_r F_r \cdot \sum_i (F'_i|F_r)|F_r = \sum_r U_r (F'_i|F_r) ,$$

con i $\sum$ estesi pure essi da 1 a q, sarà, da quanto si è detto nel n. 1,

$$G_{\Omega'} U'_i = G_\Omega U_i = \sum_r U_r F_r \cdot \sum_i (F'_i|F_r) = \sum_r G_\Omega U_r (F_r|F'_r) ;$$

d'onde, moltiplicando a diritta per F'_i, e sommando da 1 a q:

$$\sum_i G_{\Omega'} U'_i \cdot F'_i = G_\Omega U_1 \cdot \sum_i (F_1|F'_i) F'_i + \cdots + G_\Omega U_q \cdot \sum_i (F_q|F'_i) F'_i .$$

Ma, per $r = 1, 2, \ldots, q$, è [(DR, I), form. (2)]:

$$(F_r|F'_1) F'_1 + (F_r|F'_2) F'_2 + \cdots + (F_r|F'_q) F'_q = F_r ;$$

dunque, moltiplicando per $(-1)^\theta$, sarà, in fine:

$$G_{\Omega'} U' = (-1)^\theta \sum_i G_\Omega U_i \cdot F_i = G_\Omega U , \tag{14}$$

la quale dimostra la *proprietà enunciata del gradiente*, in ordine a un mutamento della piramide di riferimento, *anche quando si tratti di funzioni estensive*.

3. Visto il modo col quale si passa dal gradiente all'hamiltoniano [cfr. N. I e N. II, e le formule (7) nella 2ª delle 3 Note ai Lincei, citate in principio, circa le definizioni di questi operatori e le relazioni fra loro], visto che Ω e $|\Omega$ subiscono gli stessi cambiamenti circa le coordinate quando si cambia di piramide di riferimento, e visto inoltre che il cambiamento di Ω in $|\Omega$ porta seco il cambiamento di ϱ in $\varrho' = n + 1 - \varrho$ e di ϱ' in ϱ, sicchè rimane inalterato il fattore $(-1)^{\varrho\varrho'}$ che accompagna l'espressione di un hamiltoniano, le conclusioni enunciate circa i gradienti valgono senz'altro circa gli hamiltoniani.