ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

perature inferiori ai 100° C., come si usa col siero di sangue; ma in tal caso occorrerebbe valersi di latte munto asetticamente. In ogni modo poi il latte sterilizzato bianco richiede di essere controllato rigorosamente rispetto alla sua amicrobicità.

Solamente quando, colla scorta degli accorgimenti tecnico-culturali che sono scaturiti dalle mie ricerche, si sia arrivati a sviscerare e ad attivare i poteri proteolitici di un dato fermento lattico, sarà concesso di differenziarlo dagli altri, di *selezionarlo* e di apprezzarne e sfruttarne il valore sia a scopo agricolo-industriale sia a scopo medico, dove pure s' impone di tener conto non solamente del potenziale acidificante ma altresì dei prodotti di proteolisi (albumosi, peptoni, aminoacidi ecc.) dei fermenti impiegati.

Matematica. — *Sulle trasformazioni asintotiche delle curve* [1]. Nota di Matteo Bottasso, presentata dal Socio T. Levi-Civita [2].

1. Il prof. Bianchi in una sua Memoria [3] ha dato le formole che esprimono le trasformate asintotiche d'una curva (§ 1), considerando poi fra queste quelle che rientrano nelle trasformazioni di Bäcklund delle curve a torsione costante (§ 11). Il Picone [4] riotteneva queste ed altre proprietà dalle più generali trasformazioni asintotiche (B_k) che lasciano in ogni punto invariata la torsione, seguendo però una via più complicata. Ora tutte queste proprietà possono benissimo dedursi molto più semplicemente, seguendo la via stessa del Bianchi e senza introdurre la flessione della curva, col calcolo vettoriale assoluto. È già stato mostrato [5] come questo permetta di ridurre la cit. Memoria del Bianchi. In questa Nota (nn. 2 e 3) completo quanto trovasi negli *Elementi* ora cit., precisando con maggior rigore il detto § 1 del Bianchi, deducendo poi rapidamente le proprietà del Picone. Infine, come es., mi è parso utile mostrare (n. 7) come si ottengano facilmente tutte le asintotiche del conoide retto.

(1) Lavoro eseguito nella R. Università di Messina.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 ottobre 1917.

(3) L. Bianchi, *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie*, Rendic. del Circ. matem. di Palermo, tomo XXV (1° sem. 1908), pp. 291-325.

(4) M. Picone, *Intorno alle trasformazioni asintotiche delle curve e complementi alla Memoria « Sulle congruenze rettilinee W »*, ibidem. tomo XXXIX (1° sem. 1915), pp. 51-73.

(5) Burali-Forti C. e R. Marcolongo, *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria*, ecc. (Bologna, Zanichelli, 1909), pag. 85.

2. Se $\mathbf{u}$ è un vettore funzione di t, il punto P tale che, per $\varepsilon = \pm 1$,

$$\text{(1)} \qquad P' = \varepsilon \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u}\,, \quad \text{ossia} \quad P = O + \varepsilon \int \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u}\, dt\,,$$

(essendo O un punto fissato ad arbitrio) descrive una linea la cui binormale in P è parallela ad $\mathbf{u}$, ed il cui raggio di torsione τ (positivo pe $\varepsilon = +1$, negativo per $\varepsilon = -1$) vale

$$\text{(2)} \qquad \tau = \varepsilon \mathbf{u}^2\,.$$

Dato il vettore $\mathbf{u}$, la linea P è determinata a meno d'una traslazione, ed inversamente data la P il vettore $\mathbf{u}$ è determinato a meno del segno. Se P è punto funzione data di t, allora la 1ª delle (1) (equazione differenziale in $\mathbf{u}$) secondochè, in tutto il campo di t, $P' \wedge P'' \times P''' \gtreqless 0$, ha per soluzione $\mathbf{u} = -\varepsilon(\pm P' \wedge P'' \times P''')^{-\frac{1}{2}} P' \wedge P''$.

Infatti dev'essere $\mathbf{u} = hP' \wedge P''$, da cui

$$\mathbf{u}' = h'P' \wedge P'' + hP' \wedge P''' \;\; ; \;\; \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} = -h^2 . P' \wedge P'' \times P''' . P'\,.$$

3. Si chiama « trasformata asintotica d'una linea gobba P » ogni linea P_1 tale che P, P_1, funzioni *distinte* della stessa variabile t, sono asintotiche (curvilinee) della rigata PP_1. Va notato che siccome ogni rigata sviluppabile possiede come unico sistema di asintotiche le sue generatrici la rigata PP_1 è necessariamente *gobba*.

TEOREMA. — *Ogni trasformata asintotica della* (1) *è definita da*

$$\text{(3)} \qquad P_1' = \varepsilon \mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u}_1\,,$$

ove il vettore $\mathbf{u}_1$ *soddisfa alle condizioni*

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{u} \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}' \neq 0 \quad , \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_1' \neq 0\,,$$

$$\text{(5)} \qquad \varepsilon \mathbf{u}_1' \pm \mathbf{u}' = \omega_1(\mathbf{u}_1 \mp \varepsilon \mathbf{u})\,,$$

essendo ω_1 *una funzione arbitraria di* t, *e si ha*

$$\text{(6)} \qquad P_1 = P \pm \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}\,.$$

Se ω_1 *è la derivata logaritmica della funzione* ψ_1^{ε}, *si ha*

$$\text{(5')} \qquad \mathbf{u}_1 = \psi_1 \left[\mathbf{a} \mp \varepsilon \int \psi_1^{-2} d(\psi_1 \mathbf{u}) \right],$$

ove $\mathbf{a}$ *è vettore costante arbitrario, e* ψ_1 *è funzione arbitraria (non nulla) di* t.

Se δ *è la distanza dei punti* P, P_1, *e* γ *è l'angolo di* $\mathbf{u}$ *con* $\mathbf{u}_1$, *allora*

$$\text{(7)} \qquad \delta = \sqrt{\tau \tau_1}\, \operatorname{sen} \gamma\,.$$

Infatti, perchè P, P_1 siano asintotiche curvilinee della rigata PP_1 è necessario che $P_1 - P$ sia normale ad $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{u}_1$, cioè che si abbia

$$(a) \qquad P_1 = P + h\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u},$$

ove al variare di t ed h s'ottengono tutti i punti della rigata. Perchè questa sia gobba dev'essere ([1]) $P' \wedge (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}) \times (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u})' = -\varepsilon(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}')^2 \neq 0$; ed analogamente per P_1, cioè sussistono le (4).

Derivando (a), e ritenuto per ora scritto $\varepsilon_1 = \pm 1$ in luogo di ε nella (3), si ha

$$(b) \qquad \varepsilon \mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u}_1 - \varepsilon_1 \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} = h' \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u} + h\mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u} + h\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}';$$

moltiplicando internamente per $\mathbf{u}$ o per $\mathbf{u}_1$ si ottiene

$$\varepsilon \mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u} = h\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}' \times \mathbf{u} \quad , \quad \varepsilon_1 \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{u}_1 = h\mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{u}_1,$$

da cui, per le (4), $h^2 = \varepsilon\varepsilon_1$. Perchè h sia reale dev'essere intanto, come si è posto in (3), $\varepsilon = \varepsilon_1$, cioè *le due asintotiche* P, P_1 *hanno necessariamente torsioni d'egual segno.*

Ciò essendo, si ricava $h = \pm 1$ e sostituendo allora in (b) si trae

$$(5'') \qquad (\varepsilon \mathbf{u}_1' \pm \mathbf{u}') \wedge (\mathbf{u}_1 \mp \varepsilon \mathbf{u}) = 0,$$

equivalente alla (5), che è così *necessaria.* È pure *sufficiente* perchè dalla (6), tenendo conto delle (1) e combinando poi con (5″) si ha

$$P_1' = \varepsilon \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} \pm \mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u} \pm \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}' = \varepsilon \mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u}_2.$$

Seguono subito la (5′) integrando l'equazione lineare (5); e la (7) dalla (6) per essere $\delta = \mathrm{mod}(P_1 - P)$.

Osservazione. — La linea simmetrica della P rispetto al punto fisso O, cioè $Q = 2O - P$, ha torsioni di segno opposto a quelle di P, perchè $Q' = -P' = -\varepsilon \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u}$; e la simmetrica di P_1 rispetto ad O, per la (6), è $Q_1 = Q \mp \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}$ e risulta trasformata asintotica di Q. Dunque, senza nulla togliere alla generalità, τ e τ_1 *si possono supporre positivi.*

Scegliendo opportunamente il senso di $\mathbf{u}_1$ (n. 2) la (6) mostra che è lecito porre $h = 1$, cioè — come si riterrà fatto sempre per quanto segue — in tutte le formole precedenti si può scegliere il segno superiore, oltre al supporre $\varepsilon = +1$.

4. Consideriamo la trasformazione asintotica della linea P caratterizzata da

$$(8) \qquad \mathbf{u}^2 = \mathbf{u}_1^2 \qquad \text{(equivalente a } \tau_1 = \tau).$$

([1]) C. Burali-Forti, *Corso di geometria analitico-proiettiva* (Torino, Gallizio, 1912), n. 167, pag. 142.

Moltiplicando internamente per $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}$ la (5), per la (8) si ha

$$0 = (\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}') \times (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}) = \tfrac{1}{2} [(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u})^2]' ,$$

da cui risulta, indicando con k una costante positiva

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u})^2 = 2k . \tag{9}$$

La costante k di Picone (loc. cit., pag. 59) riceve così un significato geometrico semplice che ne rende evidenti tutte le sue proprietà. Essa permette di esprimere la distanza $\delta = \operatorname{mod}(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P})$, e l'angolo dei due piani osculatori $\gamma = \operatorname{ang}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$, poichè tenendo conto delle (8), (9), (7) si ha subito

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u} = \tau \cos \gamma , \tag{10}$$

$$\tau + \tau \cos \gamma = k , \tag{11}$$

$$\cos \gamma = \frac{k}{\tau} - 1 , \quad \operatorname{sen} \gamma = \frac{1}{\tau} \sqrt{k(2\tau - k)} , \quad \delta = \sqrt{k(2\tau - k)} . \tag{12}$$

La linea P_1 così caratterizzata dalla proprietà che in ogni punto ha *torsione eguale* a quella del punto corrispondente della linea P si dirà, con Picone, ottenuta con « una trasformazione B_k ». In virtù della (8) si ha subito

$$\tau' = 2\mathbf{u} \times \mathbf{u}' = 2\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_1' ; \tag{13}$$

tenendo conto di questa, se si moltiplica per $\mathbf{u}_1' - \mathbf{u}'$ la (5) si ottiene

$$\mathbf{u}_1'^2 - \mathbf{u}'^2 = \omega_1 (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u})' . \tag{14}$$

Dalla (1) segue $\mathrm{P}'^2 = \mathbf{u}'^2 \mathbf{u}^2 - (\mathbf{u}' \times \mathbf{u})^2$ ed analogamente per P_1'; quindi per la (8) si ha $\mathrm{P}_1'^2 - \mathrm{P}'^2 = \mathbf{u}_1'^2 \mathbf{u}_1^2 - \mathbf{u}'^2 \mathbf{u}^2 = \mathbf{u}^2 (\mathbf{u}_1'^2 - \mathbf{u}'^2)$, vale a dire, per la (14)

$$\mathrm{P}_1'^2 - \mathrm{P}'^2 = \mathbf{u}^2 (\mathbf{u}_1'^2 - \mathbf{u}'^2) = \omega_1 \mathbf{u}^2 (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \times \mathbf{u}_1)' . \tag{15}$$

In virtù delle (2), (10), (11), (12), le (14) e (15) assumono le forme

$$\mathbf{u}_1'^2 - \mathbf{u}'^2 = \omega_1 (\tau - \tau \cos \gamma)' , \tag{14'}$$

$$\mathrm{P}_1'^2 - \mathrm{P}'^2 = \omega_1 \tau (\tau - \tau \cos \gamma)' . \tag{15'}$$

5. *Se in una trasformazione* B_k *uno degli elementi* τ, δ, γ *è costante, sono pure costanti gli altri due e le linee* P, P_1 *hanno eguale arco.*

La prima parte risulta subito dalle (12), e la seconda da queste e dalla (15').

6. *In una trasformazione* B_k *si conservano gli archi solamente quando*

1°) *la linea* P *è a torsione costante;*

2°) P *è asintotica d'un conoide retto, nel qual caso la detta sua trasformata secondo* B_k *è la simmetrica della* P *rispetto all'asse del conoide.*

Affinchè P, P_1 abbiano eguale arco occorre e basta, per la (15), che

$$(a) \qquad \mathbf{u}_1'^2 - \mathbf{u}'^2 = 0 .$$

1°) Sia $\omega_1 \neq 0$. Allora dalla (14') e dalla (*a*) si ha $\tau - \tau \cos\gamma = \text{cost}$, che sommata con la (11) dà appunto $\tau =$ costante.

2°) Sia $\omega_1 = 0$. Dalla (5) si ha allora $\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}' = 0$, che integrata da

$$(b) \qquad \mathbf{u}_1 + \mathbf{u} = 2a\mathbf{k} ,$$

ove $\mathbf{k}$ è vettore unitario costante ed a è un numero reale costante. Da questa si ha $\mathbf{u}_1 = 2a\mathbf{k} - \mathbf{u}$; quadrando e sommando, in virtù della (8), si ottiene

$$(c) \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{u} = \pm a .$$

Dalla stessa (*b*) si ha ancora

$$(d) \qquad \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u} = 2a . \mathbf{k} \wedge \mathbf{u} \quad , \quad P_1 = P + 2a\mathbf{k} \wedge \mathbf{u} .$$

Se P_0 è punto medio fra P e P_1 si ha $P_0 = P + a_0 \mathbf{k} \wedge \mathbf{u}$, da cui $P_0' = \mathbf{u}' \wedge (\mathbf{u} - a\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \wedge P_0' = (\mathbf{k} \times \mathbf{u} - a)\mathbf{u}'$ e, per la (*c*), $\mathbf{k} \wedge P_0' = 0$. Dunque il punto P_0 descrive una retta parallela al vettore $\mathbf{k}$, cioè la rigata PP_1 è un conoide (di asse $P_0\mathbf{k}$) *retto* perchè, in virtù della (*d*), $(P_1 - P) \times \times \mathbf{k} = 0$. L'inverso è evidente.

7. Si possono ottenere in modo assai semplice tutte le asintotiche d'un conoide retto.

Sia $\mathbf{k}$ un vettore unitario costante; $\mathbf{i}$ vettore unitario funzione di t normale a $\mathbf{k}$; si ponga $m = \operatorname{mod} \mathbf{i}'$, $\mathbf{j}' = -\mathbf{i}'/m$, ed il verso di $\mathbf{k}$ sia tale che $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$. Si avrà $\mathbf{i}' = -m\mathbf{j}$, $\mathbf{j}' = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{i})' = m\mathbf{i}$. Ciò posto, per il punto generico P del conoide retto di asse $O\mathbf{k}$, si ha

$$(\alpha) \qquad P = O + t\mathbf{k} + x\mathbf{i} ;$$

$$(\beta) \qquad P' = \mathbf{k} + x'\mathbf{i} - mx\mathbf{j} ,$$

avendo supposto x funzione di t. Ora perchè in questa ipotesi la linea P sia una asintotica, dev'essere $\mathbf{u}$ normale ad $\mathbf{i}$, e per la (*c*) del n. 6, $\mathbf{k} \times \mathbf{u} =$ = costante, vale a dire $\mathbf{u} = h\mathbf{j} + a\mathbf{k}$, e quindi $P' = \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} = ah'\mathbf{i} + mh^2\mathbf{k} - - ahm\mathbf{j}$, che confrontata con ($\beta$) dà $mh^2 = 1$, $h = 1/\sqrt{m}$, $x = a/\sqrt{m}$, e quindi le asintotiche del conoide son descritte dai punti

$$(\gamma) \qquad P_a = O + t\mathbf{k} + a/\sqrt{m}\,\mathbf{i} , \quad \text{con} \quad m = \operatorname{mod} \mathbf{i}' ,$$

essendo $\mathbf{i}$, con $\mathbf{i}+\mathbf{k}=0$, $\mathbf{i}^2=1$, funzione di t. Per $a=0$ si ha l'asse Ok del conoide.

Dall'espressione di $\mathbf{u}$ e per la (2) si ha subito

$$\tau = \frac{1}{m} + a^2. \tag{ε}$$

Dalla (γ) segue subito il notevole teorema: *Se* P_a, P_b *sono asintotiche, allora il baricentro dei punti* P_a, P_b *con le masse* r, s $(r+s \neq 0)$ *descrive l'asintotica* P_c *con* $c=(ra+sb)/(r+s)$.

E. M.