ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 novembre 1917.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione nel quale sussistono dei moti interni variabili.* Nota di Orazio Lazzarino, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

In due Note precedenti ho studiato, per via intrinseca, il moto di rotazione di un sistema che si suppone sottratto all'azione di forze esterne e nel quale sussistono dei moti interni stazionarî [2].

In questa Nota mi propongo di dimostrare come, partendo dall'integrale delle aree sotto la forma più generale da me trovata, si possa studiare con estrema semplicità il caso della rotazione di un *corpo di rivoluzione* nel quale sussistano dei *moti interni variabili*, tali però che non alterino nè la forma nè la distribuzione di densità del corpo.

Di questo caso, particolarmente interessante per le applicazioni ai moti del polo terrestre, si sono occupati i proff. V. Volterra [3] e G. Peano [4], dei quali ritrovo anche, per via più semplice, i principali risultati teorici.

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1917.

[2] Lazzarino, *Rappresentazione cinematica della rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionari*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1917; *Assi permanenti nel moto di rotazione di un corpo* ecc., id., 2° sem. 1917.

[3] V. Volterra, *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre*, Astron. Nachrichten, Bd. 138, n. 3291-92; *Sur la théorie des variations des latitudes*, Acta Mathematica, t. XXII; *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni variabili*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1895, pag. 107 e 1° sem. 1896, pag. 4.

[4] G. Peano, *Sopra lo spostamento del polo sulla terra*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, t. XXX, pag. 515 (1894-95); *Sul moto del polo terrestre*, id., t. XXX,

1. Ho precedentemente dimostrato che, nel moto di rotazione di un corpo sottratto all'azione di forze esterne e nel quale sussistono dei moti interni anche variabili, tali però che non alterino nè la forma nè la distribuzione di densità del corpo, sussiste l'integrale delle aree e può scriversi sotto la forma notevole

$$\alpha\Omega + \mathbf{M}_i = \mathbf{K} \tag{1}$$

dove α è l'omografia d'inerzia del sistema rispetto al baricentro O di questo; Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione intorno ad O; $\mathbf{M}_i$ il momento, rispetto ad O, dell'impulso dovuto ai moti interni; $\mathbf{K}$ un *vettore costante* (¹) che rappresenta il momento, rispetto ad O, dell'impulso totale del sistema e che è completamente determinato, in grandezza, direzione e verso, quando sian date le condizioni iniziali che determinano il moto.

Se l'ellissoide centrale d'inerzia si riduce ad un ellissoide di rivoluzione intorno ad uno dei suoi assi principali, per es. $O\mathbf{k}$, questo asse diventa un elemento intrinseco del sistema e due dei momenti principali di inerzia risultano eguali fra loro.

Siano A, B, C tali momenti; supponendo $A = B$ ed indicando con ε lo schiacciamento polare, ponendo cioè $\varepsilon = (C - A)/A$, l'omografia α di inerzia assume la forma (²)

$$\alpha = A + (C - A) \,.\, H(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = A[1 + \varepsilon H(\mathbf{k}, \mathbf{k})] \tag{2}$$

da cui si deduce (³)

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{A}\left[1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} H(\mathbf{k}, \mathbf{k})\right]. \tag{3}$$

---

pag. 845; *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni variabili.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1895, pag. 281; *Sul moto del polo terrestre*, id., 1° sem. 1896, pag. 163.

(¹) Giova osservare che le espressioni « *vettore costante* » e « *vettore funzione del tempo* » significano, nel comune linguaggio cartesiano, vettori le cui coordinate, *rispetto ad assi fissi, nella comune accezione meccanica dell'appellativo fisso*, sono rispettivamente « *costanti* » e « *funzioni del tempo* ».

(²) Infatti, indicando con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ le direzioni unite della dilatazione α, si ha

$$\alpha = H(\mathbf{i}, \alpha\mathbf{i}) + H(\mathbf{j}, \alpha\mathbf{j}) + H(\mathbf{k}, \alpha\mathbf{k}) = A[H(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + H(\mathbf{j}, \mathbf{j})] + C \,.\, H(\mathbf{k}, \mathbf{k}) =$$
$$= A[1 - H(\mathbf{k}, \mathbf{k})] + C \,.\, H(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = A + (C - A) \,.\, H(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \qquad \text{c. d. d.}$$

(³) Considerando, più generalmente, l'omografia $\alpha_1 = A[1 + \varepsilon H(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$, indicando con $\mathbf{x}$ un vettore unitario qualsiasi e ponendo $\alpha_1 \mathbf{x} = \mathbf{y}$, si ha

$$\mathbf{y} = A(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{a} \times \mathbf{x} \,.\, \mathbf{b}) \quad \text{da cui si ricava:} \quad (a) \quad \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{a} \times \mathbf{x} \,.\, \mathbf{b} = \mathbf{y}/A \,.$$

Moltiplicando la (a) scalarmente per $\mathbf{a}$, si deduce $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = (\mathbf{a} \times \mathbf{y})/A(1 + \varepsilon \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ e, sostituendo nella (a), si trae:

$$\mathbf{x} = 1/A\left[\mathbf{y} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \mathbf{a} \times \mathbf{b}} \mathbf{a} \times \mathbf{y} \,.\, \mathbf{b}\right] = 1/A\left[1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \mathbf{a} \times \mathbf{b}} H(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right]\mathbf{y}$$

da cui segue la (3) ponendo $\mathbf{b} = \mathbf{a}$.

In questo caso, tenendo conto della (2), la (1) può scriversi

$$A(\Omega + \varepsilon\,\Omega \times \mathbf{k}\,.\,\mathbf{k}) + \mathbf{M}_i = \mathbf{K} \tag{1'}$$

da cui si ricava immediatamente

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{K} - A(\Omega + \varepsilon\,\Omega \times \mathbf{k}\,.\,\mathbf{k})\,. \tag{4}$$

Inoltre, la velocità dell'asse $O\mathbf{k}$ d'inerzia è data da

$$d\mathbf{k}\,/\,dt = \Omega \wedge \mathbf{k} \tag{5}$$

che è un'equazione lineare e può quindi integrarsi facilmente [1].

Applicandovi lo sviluppo in serie indicato dal Peano [2] e ponendo $\Omega \wedge = \beta$, si ha

$$\mathbf{k} = \left[1 + \int \beta\,dt + \int \beta\,dt \int \beta\,dt + \cdots\right]\mathbf{k}_0 \tag{6}$$

dove β è una omografia funzione integrabile del tempo e $\mathbf{k}_0$ è la posizione del vettore $\mathbf{k}$ per $t = 0$. La (6) è una serie sempre convergente e permette di determinare completamente, quando sia noto il vettore Ω in funzione del tempo, il vettore $\mathbf{k}$ e quindi l'asse $O\mathbf{k}$ d'inerzia ed il punto $O + \mathbf{k}$ che è il polo d'inerzia. Si può dunque concludere che « *quando sia noto, in* « *funzione del tempo, il vettore* Ω *che rappresenta la velocità istantanea* « *di rotazione del sistema, e sian date le condizioni iniziali del moto* « *che determinano completamente il vettore* $\mathbf{K}$ *costante (fisso nello spazio),* « *le formole* (6) *e* (4) *permettono di determinare, in funzione del tempo,* « *la posizione del polo* $O + \mathbf{k}$ *d'inerzia ed il momento* $\mathbf{M}_i$ *dell'impulso* « *dovuto ai moti interni* ».

2. Risolvendo, invece, la (1) rispetto ad Ω, si ha

$$\Omega = \alpha^{-1}(\mathbf{K} - \mathbf{M}_i) \tag{7}$$

ossia, per la (3),

$$\Omega = \frac{1}{A}\left[(\mathbf{K} - \mathbf{M}_i) - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(\mathbf{K} - \mathbf{M}_i) \times \mathbf{k}\,.\,\mathbf{k}\right]. \tag{7'}$$

Questa relazione esprime che « *la velocità istantanea di rotazione del* « *sistema è la risultante di due velocità, una diretta secondo il vettore* « $\mathbf{K} - \mathbf{M}_i$ *e l'altra secondo l'asse* $O\mathbf{k}$ *d'inerzia* ».

Inoltre, sostituendo nella (5) l'espressione (7') di Ω, si ha la relazione

$$d\mathbf{k}/dt = (1/A)(\mathbf{K} - \mathbf{M}_i) \wedge \mathbf{k} \tag{8}$$

[1] Cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Paris 1887, Chap. II.

[2] G. Peano, *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*, Atti della R. Accad. di Torino, a. 1887; Mathem. Annalen, t. 32, pag. 450.

dove non figura affatto lo schiacciamento polare ε. Si può quindi dire che « *nel caso in esame, la velocità dell'asse* Ok *d'inerzia è indipendente dallo schiacciamento polare* ».

Essendo anche la (8) un'equazione lineare, si può ad essa applicare il procedimento d'integrazione sopra indicato e, ponendo $(1/A)(\mathbf{K}-\mathbf{M}_i)\wedge=\gamma$, si ha

$$\mathbf{k}=\left[1+\int\gamma\,dt+\int\gamma\,dt\int\gamma\,dt+\cdots\right]\mathbf{k}_0 \tag{9}$$

dove $\mathbf{k}_0$ ha lo stesso significato di prima e γ è una omografia funzione integrabile del tempo.

Si può dunque concludere che « *supposto noto il vettore* $\mathbf{M}_i$, *qualunque* « *esso sia, in funzione del tempo, ed il vettore* K *costante e fisso nello* « *spazio, si può, mediante la* (9), *determinare* $\mathbf{k}$ *e quindi il polo* $O+\mathbf{k}$ « *d'inerzia del sistema; onde resta in seguito determinato, per la* (7'), « *il vettore* Ω, *cioè la velocità istantanea di rotazione del corpo, in fun-* « *zione del tempo* ».

3. Supponendo ora il vettore $\mathbf{M}_i$ costante e fisso nello spazio, sarà pure tale il vettore $\mathbf{K}-\mathbf{M}_i$ che indico con $\mathbf{K}_1$; allora la (4) porge

$$\Omega+\varepsilon\,\Omega\times\mathbf{k}\,.\,\mathbf{k}=\mathbf{K}_1/A \tag{4'}$$

cioè « *durante la rotazione del corpo, risulta sempre costante in gran-* « *dezza, direzione e verso la somma geometrica del vettore* Ω *e della pro-* « *iezione di* $\varepsilon\,\Omega$ *sull'asse* Ok *d'inerzia* ».

Inoltre la (7') e la (8) dànno, in questo caso, rispettivamente

$$\Omega=\frac{1}{A}\left(\mathbf{K}_1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\mathbf{K}_1\times\mathbf{k}\,.\,\mathbf{k}\right) \tag{7''}$$

$$d\mathbf{k}/dt=(1/A)\,\mathbf{K}_1\wedge\mathbf{k}\,. \tag{8'}$$

Integrando la (8') si ha la posizione dell'asse Ok d'inerzia e quindi, per la (7''), si può determinare, in funzione del tempo, il vettore Ω, quando sia noto il vettore $\mathbf{K}_1$.

Si può inoltre osservare che, essendo $\mathbf{k}$ un vettore unitario, la (8') esprime che *il polo d'inerzia* $O+\mathbf{k}$ (*e quindi l'asse* Ok) *ruota, con ve-* « *locità angolare costante ed eguale a* $(\mathrm{mod}\,\mathbf{K}_1)/A$, *intorno all'asse* OK_1 « *che è fisso nello spazio, descrivendo così, con moto uniforme, un cono* « *di rivoluzione intorno a questo asse* ».

Supponendo poi $\mathbf{M}_i=0$ (caso del corpo completamente rigido), si ha $\mathbf{K}_1=\mathbf{K}$ e valgono evidentemente le formole (4'), (7'') e (8') ove si sostituisca K al posto di $\mathbf{K}_1$. Si può quindi concludere che « *un corpo nel cui* « *interno sussistano dei moti ciclici tali che il loro momento d'impulso,*

« *rispetto al baricentro del sistema, risulti costante* (*nello spazio*), *si* « *comporta in modo perfettamente analogo ad un corpo completamente* « *rigido* ».

4. È infine interessante osservare che si può facilmente trovare una semplice rappresentazione del moto dell'asse $O\mathbf{k}$ e quindi del polo $O+\mathbf{k}$ d'inerzia. Infatti la (8) porge

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{1}{A}\,\mathrm{K} \wedge \mathbf{k} - \frac{1}{A}\,\mathbf{M}_i \wedge \mathbf{k} \tag{10}$$

cioè « *la velocità del polo* $O+\mathbf{k}$ *d'inerzia è la risultante di due velo-* « *cità: una, di grandezza* $(1/A)\bmod \mathrm{K}$, *intorno all'asse* $O\mathrm{K}$, *e l'altra,* « *di grandezza* $-(1/A)\bmod \mathbf{M}_i$, *intorno ad* $O\mathbf{M}_i$ ». Supponendo ora impressa al polo $O+\mathbf{k}$ una rotazione costante ed eguale a $-(1/A)\bmod \mathrm{K}$ intorno ad $O\mathrm{K}$ ed indicando con $\mathbf{k}_1$ ed $\mathbf{M}_{i_1}$ ciò che diventano i vettori $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{M}_i$ per effetto di questa rotazione, dalla (10) si ricava subito

$$d\mathbf{k}_1/dt = -(1/A)\,\mathbf{M}_{i_1} \wedge \mathbf{k}_1 \tag{11}$$

che esprime l'effetto dovuto esclusivamente all'impulso $\mathbf{M}_{i_1}$ dei moti interni.

Nel caso di $\mathbf{M}_{i_1} = 0$, dalla (11) risulta $\mathbf{k}_1 =$ costante. Supponendo invece $\mathbf{M}_{i_1} =$ costante, la (11) esprime che il punto $O+\mathbf{k}_1$ ruota con velocità costante ed eguale a $-(1/A)\bmod \mathbf{M}_{i_1}$ intorno ad $O\mathbf{M}_{i_1}$ e descrive una circonferenza col centro sull'asse $O\mathbf{M}_{i_1}$.

Supponendo inoltre che $O\mathbf{M}_{i_1}$ sia normale ad $O\mathrm{K}$ e che l'asse $O\mathbf{k}$ di inerzia coincida inizialmente con $O\mathrm{K}$, allora il punto $O+\mathbf{k}_1$ descriverà con moto uniforme la circonferenza massima della sfera di raggio unitario che passa per $O\mathrm{K}$.

Per avere quindi il moto del polo $O+\mathbf{k}$, basta ricomporre i due moti nei quali lo si è scomposto, supporre cioè che « *esso descriva con moto* « *uniforme la circonferenza massima passante per* $O\mathrm{K}$, *mentre questa* « *ruota con moto uniforme intorno ad* $O\mathrm{K}$ ».

Risulta adunque che « *in questo caso, il polo d'inerzia si allontana* « *con moto uniforme dall'asse dell'impulso totale del sistema e passa dalle* « *regioni polari alle equatoriali* ».