ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Matematica. — *Sulle superficie secondarie nei sistemi tripli ortogonali pseudosferici.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI [1].

1. Scopo delle pagine seguenti è di caratterizzare *geometricamente*, nei sistemi tripli ortogonali contenenti una serie di superficie pseudosferiche, di raggio costante o variabile, le superficie delle altre due serie, che si diranno per abbreviare le superficie *secondarie* di questi sistemi [2].

Partiamo perciò dal seguente problema geometrico:

Problema A) — *Trovare tutte le coppie* (S, S') *di superficie che, senza essere fra loro parallele, si corrispondono punto per punto in guisa che le loro linee di curvatura si corrispondano; inoltre i segmenti* MM' *che ne uniscono i punti corrispondenti abbiano tutti la stessa lunghezza e siano ortogonali alle linee di curvatura di un sistema di* S, *e per ciò anche alle corrispondenti di* S'.

Si vedrà che l'esistenza, per una superficie S, di una seconda superficie S' nella relazione descritta è caratteristica per le superficie S secondarie nei sistemi tripli ortogonali pseudosferici. Ne segue che ogni tale superficie S possiede non una soltanto, ma una *doppia infinità* di superficie trasformate S', le quali appartengono, come è evidente, alla medesima classe.

[1] Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1917.

[2] Nelle mie antiche ricerche: *Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten* [Annali di matematica, serie 2ª, tomo XIII (1885)] la questione, ora trattata in generale, è risoluta soltanto pel caso dei sistemi di Weingarten *a flessione costante*. Le superficie secondarie in questi sistemi sono caratterizzate dal possedere un sistema di linee di curvatura colla medesima flessione costante.

2. Si supponga data una superficie S, che riferiamo alle sue linee di curvatura (u, v), mantenendo le consuete notazioni: x, y, z per le coordinate del punto M mobile sopra S, e (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) pei coseni di direzione del triedro principale. Avremo le formole fondamentali:

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\, X_1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \frac{\sqrt{E}}{r_2} X_3, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{r_2} X_1 \\
&\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\, X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 - \frac{\sqrt{G}}{r_1} X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r_1} X_2,
\end{aligned}
\right.
$$

colle analoghe per gli altri due assi, ed i raggi principali di curvatura r_1, r_2 saranno legati ai coefficienti E, G del ds^2 dalle formole di Codazzi

$$
(\alpha)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right) = \frac{1}{r_2} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right) = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},
$$

e dall'equazione di Gauss

$$
(\beta)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) = -\frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2}.
$$

Supposto che esista una seconda superficie S′, che formi con S una coppia soddisfacente alle condizioni del problema A), indichiamo con x', y', z' le coordinate del punto M′ variabile su S′, e sia a la lunghezza costante dei segmenti MM′, i quali si supporranno ortogonali alle linee di curvatura $v = \text{cost.}$; avremo

$$
(2)\qquad x' = x + a(\cos\theta\, X_2 + \operatorname{sen}\theta\, X_3),
$$

colle analoghe, avendo indicato con $\theta = \theta(u, v)$ l'angolo d'inclinazione del segmento MM′ sulla linea $v = \text{cost.}$ Essendo escluso il caso di una coppia (S, S′) di superficie parallele, *l'angolo θ non sarà un angolo retto*, e la funzione $\theta = \theta(u, v)$ dovrà essere tale che risultino soddisfatte le condizioni seguenti:

1°) *le linee (u, v) sopra S′ siano ortogonali*;

2°) *esse siano inoltre coniugate.*

Per esprimere queste condizioni cominciamo dal derivare le (2) rapporto ad u, v ed osservando le (1) troveremo:

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= \left(\sqrt{E} + \frac{a}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cos\theta + a \frac{\sqrt{E}}{r_2} \operatorname{sen}\theta\right) X_1 + \\ &\qquad + a \frac{\partial \theta}{\partial u} (-\operatorname{sen}\theta\, X_2 + \cos\theta\, X_3) \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= -\frac{a}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cos\theta\, X_1 + \left\{ \sqrt{G} - a \operatorname{sen}\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{r_1} \right) \right\} X_2 + \\ &\qquad + a \cos\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{r_1} \right) X_3 , \end{aligned} \right.$$

Introduciamo, come seconda funzione incognita $\sigma = \sigma(u, v)$, l'angolo σ che formano fra loro le tangenti in punti corrispondenti alle due linee $v = \text{cost}$ di S, S', ed *escludiamo per ora il caso che l'angolo* σ *sia retto*, caso singolare che sarà trattato a parte (n. 8). Dovremo avere

$$S X_1 \frac{\partial x'}{\partial u} = \cos\sigma \sqrt{S \left(\frac{\partial x'}{\partial u} \right)^2} ,$$

il che dà per la (3_1)

$$(a)\quad \frac{\partial \theta}{\partial u} = \operatorname{tg}\sigma \left\{ \frac{\sqrt{E}}{a} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cos\theta + \frac{\sqrt{E}}{r_2} \operatorname{sen}\theta \right\} ,$$

indi pei coseni di direzione X'_1, Y'_1, Z'_1 delle tangenti alla $v = \text{cost}$ sopra S'

$$(4)\quad X'_1 = \cos\sigma\, X_1 + \operatorname{sen}\sigma (-\operatorname{sen}\theta\, X_2 + \cos\theta\, X_3) ,$$

colle analoghe.

La prima condizione enunciata porta che si abbia

$$S X'_1 \frac{\partial x'}{\partial v} = 0 ,$$

ossia per la (3)

$$(b)\quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r_1} + \frac{\cot\sigma}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cos\theta + \frac{\sqrt{G}}{a} \operatorname{sen}\theta .$$

Indicando similmente con X'_2, Y'_2, Z_2 i coseni di direzione della tangente alla $u = \text{cost}$ sopra S', avremo dalla (3_2), osservando la (b):

$$(5)\quad \begin{aligned} X'_2 \equiv &-\frac{a}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \sqrt{G} (\cos\theta\, X_2 + \operatorname{sen}\theta\, X_3) + \\ &+ \frac{a \cot\sigma}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} (-\operatorname{sen}\theta\, X_2 + \cos\theta\, X_3) , \end{aligned}$$

colle analoghe, il segno $\equiv$ significando eguaglianza a meno di un fattore comune di proporzionalità nelle tre formole.

Dalle (4), (5) seguono poi subito pei coseni di direzione X'_3, Y'_3, Z'_3 della normale S' le formole:

$$(6)\qquad X'_3 \equiv \sqrt{G}\,\operatorname{sen}\sigma\, X_1 + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}(\cos\theta\, X_2 + \operatorname{sen}\theta\, X_3) + \\ + \sqrt{G}\cos\sigma\,(\operatorname{sen}\theta\, X_2 - \cos\theta\, X_3)\,.$$

3. Venendo ora alla seconda delle condizioni enunciate, che le linee u, v siano coniugate sopra S', questa potrà esprimersi coll'equazione:

$$(7)\qquad S\, X'_3 \frac{\partial X'_1}{\partial v} = 0\,.$$

Ma dalle (4), derivando rapporto a v celle (1), ed osservando la (5) e la (6), abbiamo

$$\frac{\partial X'_1}{\partial v} = -\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta}{a}X'_2 + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\left\{-\operatorname{sen}\sigma\, X_1 + \cos\sigma\,(-\operatorname{sen}\theta\, X_2 + \cos\theta\, X_3)\right\},$$

e per ciò la (7), avendosi $S\,X'_2 X'_3 = 0$, resta semplicemente $\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0$, onde segue che σ è una funzione della sola u: *L'angolo σ che formano fra loro le tangenti in punti corrispondenti alle linee di curvatura $v = \text{cost}$ sopra S, S' deve rimanere invariabile lungo le linee di curvatura $u = \text{cost}$ dell'altro sistema.*

Raggiunto questo primo risultato, prendiamo le equazioni differenziali (a), (b) cui deve soddisfare la funzione $\theta = \theta(u, v)$, ed avremo il sistema:

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} &= \operatorname{tg}\sigma\left\{\frac{\sqrt{E}}{a} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\theta + \frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\theta\right\} \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{\sqrt{G}}{r_1} + \frac{\cot\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\cos\theta + \frac{\sqrt{G}}{a}\operatorname{sen}\theta\,, \end{aligned}\right.$$

dove è da ricordarsi che $\sigma = \sigma(u)$ è funzione di u soltanto, la cui derivata si indicherà con $\sigma'(u)$. Ora si formi la condizione d'integrabilità della (I) derivando la prima rapporto a v, la seconda rapporto ad u, e sottraendo con riguardo alle (I) stesse ed alle formole (α) di Codazzi. Omettendo i termini che si distruggono, resta:

$$\operatorname{tg}\sigma\cos\theta\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) - \cot^2\sigma\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \right. \\ \left. + \sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{\sigma'\cos\sigma}{\operatorname{sen}^3\sigma}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right\} = 0\,.$$

Il fattore $\operatorname{tg}\sigma\cos\theta$ non può annullarsi nelle nostre ipotesi, e deve quindi eguagliarsi a zero la quantità fra parentesi $\{\ \}$, ciò che per l'equazione (β) di Gauss, si traduce nella equazione equivalente

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{a^2}\sqrt{EG}-\frac{\sigma'\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0\,.$$

Ponendo

$$(9)\qquad U=\frac{a}{\operatorname{sen}\sigma}\,,$$

sarà U una funzione della sola u, e la (8) prenderà la forma definitiva:

$$(A)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\sqrt{EG}}{U^2}+\frac{U'}{U}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0\qquad\left(U'=\frac{dU}{du}\right).$$

4. Così per le superficie S, che risolvono il problema A), è trovata quale condizione *necessaria* la (A), a cui debbono soddisfare gli elementi della S, riferita alle linee di curvatura $(u\,,v)$. Proviamo ora che questa condizione (A) è altresì sufficiente; anzi, quando sia soddisfatta, esisterà non una soltanto, ma una doppia infinità di superficie S', ciascuna delle quali formerà con la S una coppia (S, S') del problema A).

E infatti, valendo la (A) con U funzione di u soltanto, si calcoli secondo la (9) un angolo $\sigma=\sigma(u)$ dalla relazione

$$\operatorname{sen}\sigma=\frac{a}{U}\,,$$

dove per a si prenderà una costante qualunque ([1]).

I calcoli stessi eseguiti al n. 3 dimostrano che il sistema differenziale (I) per la funzione incognita $\theta=\theta(u\,,v)$ è *completamente integrabile*; per ciò il suo integrale generale $\theta=\theta(u\,,v\,,c)$ conterrà, oltre la a, una nuova costante arbitraria c.

Scelta una tale soluzione $\theta(u\,,v\,,c)$ delle (1), le formole (2) daranno una superficie S' che formerà con S una delle coppie richieste.

È poi evidente che la relazione fra S, S' è reciproca, e per ciò la S' apparterrà alla sua volta alla medesima classe (A), ed ammetterà quindi ∞^2 superficie trasformate, fra le quali la S primitiva, e così via.

In fine si osservi che il sistema differenziale (I), prendendo per incognita $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$, assume la forma di Riccati. E nella applicazione ripetuta delle trasformazioni alle superficie della classe (A) vale al solito un *teorema di permutabilità*, sicchè basta integrare completamente la *prima* equazione di

([1]) Affinchè σ sia reale bisognerà però che, almeno in un tratto di variabilità per u, sia $|a|<|U|$.

Riccati, e le successive si integrano allora in termini finiti. Tutto ciò risulterà ricondotto a proprietà note dei sistemi tripli ortogonali pseudosferici stabilendo i teoremi di cui al num. seguente.

5. Dimostriamo che: *ogni superficie* S *della classe* (A) *è una superficie secondaria in un sistema triplo ortogonale pseudosferico.* Per questo ricerchiamo il grado di arbitrarietà delle superficie S della classe (A), rifeendoci alle formole della rappresentazione sferica. Poniamo colle notazioni usuali

$$H_1 = \sqrt{E}\ ,\ H_2 = \sqrt{G}\ ,\quad h_1 = \frac{\sqrt{E}}{r_2}\ ,\ h_2 = \frac{\sqrt{G}}{r_1}\ ,$$

e introduciamo inoltre le *rotazioni*

$$\left\{\begin{aligned} \beta_{12} &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial u} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u} \\ \beta_{21} &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial v} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\,. \end{aligned}\right.$$

Il sistema differenziale caratteristico per le superficie della classe (A) prende la forma

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial h_2}{\partial u} = \beta_{12} h_1\ ,\quad \frac{\partial H_2}{\partial u} = \beta_{12} H_1\ ,\quad \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u} = -\frac{H_1 H_2}{U^2} - \frac{U'}{U}\beta_{12} \\ &\frac{\partial h_1}{\partial v} = \beta_{21} h_2\ ,\quad \frac{\partial H_1}{\partial v} = \beta_{21} H_2\ ,\quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial v} = \frac{H_1 H_2}{U^2} + \frac{U'}{U}\beta_{12} + h_1 h_2\ , \end{aligned}\right.$$

dove U sarà pensata come una funzione assegnata di u.

I teoremi generali per l'esistenza degli integrali dei sistemi differenziali assicurano che, per *individuare* una soluzione

$$(h_1\,, h_2\ ;\ H_1\,, H_2\ ;\ \beta_{12}\,, \beta_{21})$$

del sistema (II), si possono assegnare *ad arbitrio* le tre funzioni di v cui si riducono *per* $u = 0$

$$h_2\ ,\ H_2\ ,\ \beta_{12}\ ,$$

e così pure ad arbitrio le tre funzioni di u cui si riducono per $v = 0$

$$h_1\ ,\ H_1\ ,\ \beta_{21}\ \text{[1]}.$$

Questo si interpreta geometricamente così:

[1] Si osservi che nel sistema (II) non figurano derivate nei secondi membri. I teoremi d'esistenza si applicano quindi nella massima generalità *nel campo reale,* sotto le sole condizioni di continuità per la funzione U e per le funzioni iniziali assegnate.

Per individuare una superficie S *della classe* (A) *basta assegnare, ad arbitrio, due sue linee di curvatura* C, Γ, *diciamo* $v=0$, $u=0$, *che si taglino ortogonalmente in un punto* O.

E infatti se prendiamo, per semplicità, a parametri u, v gli archi delle curve C, Γ, contati a partire da O, avremo

$$H_1 = 1\,, \quad \text{per} \quad v = 0$$
$$H_2 = 1\,, \quad \text{per} \quad u = 0\,,$$

e l'arbitrarietà che resta nelle altre funzioni

$$h_1(u\,,0)\,,\ \beta_{21}(u\,.0) \quad ; \quad h_2(0\,,v)\,,\ \beta_{12}(0\,,v)$$

permette appunto, ed in un sol modo, di dare alle curve $v=0$, $u=0$ della S le forme prescritte C, Γ.

Se ora per ciascuna linea di curvatura $u = \text{cost}$ della superficie S, così individuata, facciamo passare la superficie pseudosferica di curvatura $= -\frac{1}{U^2}$ che taglia lungo questa linea ortogonalmente la S, i teoremi sulle caratteristiche dei sistemi tripli pseudosferici (¹) dimostrano che le ∞^1 superficie pseudosferiche costruite formeranno una famiglia di Lamé, e per ciò la superficie S sarà una superficie secondaria nel sistema, come si è enunciato.

6. Consideriamo ora il caso particolare notevole che si ottiene dai risultati generali precedenti quando per la funzione arbitraria U si prenda una costante k. L'equazione caratteristica (A) diventa ora

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\sqrt{EG}}{k^2} = 0\,,$$

ed il sistema triplo ortogonale pseudosferico individuato da una superficie S di questa classe conterrà superficie pseudosferiche tutte dello stesso raggio k. Dunque: *l'equazione* (B) *caratterizza le superficie secondarie nei sistemi pseudosferici di Weingarten.*

Si osservi che dalla (B) segue l'altra

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 + \frac{G}{k^2}\right\} = 0\,,$$

onde avremo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 + \frac{G}{k^2} = V^2\,,$$

(¹) Cfr. *Lezioni*, vol. II, § 430.

con V funzione della sola v. Cangiando il parametro v, possiamo fare $V = 1$, e porre quindi

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \cos\omega \quad , \quad \frac{\sqrt{G}}{k} = \operatorname{sen}\omega ,$$

dove ω è un angolo ausiliario. Così abbiamo

$$\sqrt{E} = k\frac{\partial\omega}{\partial u} \quad , \quad \sqrt{G} = k \operatorname{sen}\omega ,$$

e l'elemento lineare, riferito alle linee di curvatura, delle superficie secondarie nei sistemi di Weingarten prende quindi la forma *caratteristica*

$$(10) \qquad ds^2 = k^2 \left\{ \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2 du^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2 \right\} .$$

Se di una tale superficie S consideriamo le ∞^1 superficie S′ trasformate che si ottengono fissando per l'angolo σ un valore costante qualunque $\left(\text{diverso però da } \frac{\pi}{2}\right)$ e prendendo, secondo la (9)

$$a = k \operatorname{sen}\sigma ,$$

è chiaro che le linee di curvatura $v = \text{cost}$ delle ∞^1 superficie S′ corrispondenti ad una medesima $v = \text{cost}$ di S saranno tracciate sulla superficie canale di raggio a, avente per asse questa linea di S, e ne taglieranno i circoli sotto l'angolo costante $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

7. Veniamo da ultimo al caso fin qui escluso $\sigma = \frac{\pi}{2}$, nel quale tuttavia le proprietà geometriche delle superficie della classe (B) si mantengono come proprietà limiti. Intanto nella costruzione geometrica testè indicata le ∞^1 curve derivate da una curva $v = v_0$ della S si contraggono in un'unica curva, in generale con due rami distinti Γ_1, Γ_{-1}, che formano lo spigolo di regresso (reale od immaginario) della superficie canale [1]. Proveremo che in effetto le due superficie della classe S_1, S_{-1}, luogo di questi due rami Γ_1, Γ_{-1}, sono due superficie della classe (B), colle linee u, v per linee di curvatura. Il passaggio dalla S alle due contigue (a destra e a sinistra) S_1, S_{-1} corrisponde alla *trasformazione complementare* dei sistemi di Weingarten [2]. La sua ripetuta applicazione fa nascere dalla S, senza calcoli d'integrazione, una serie discreta, estesa all'infinito nei due sensi, di superficie della classe (B)

$$(11) \qquad \ldots\ldots S_{-2}, S_{-1}, S, S_1, S_2 \ldots ,$$

[1] Cfr. *Lezioni*, vol. I, § 13.
[2] Cfr. *Lezioni*, vol, II, § 445.

ciascuna superficie della serie avendo per complementari le due contigue a destra e a sinistra.

Stabiliamo le proprietà enunciate, anzi con maggiore generalità, risolvendo il seguente problema:

B) *Data una superficie* S, *si considerino le* ∞^1 *superficie canali di raggio fisso* $=k$, *che hanno per assi curvilinei le linee di curvatura* $v=cost$ *di un sistema sopra* S, *e su ciascuna di queste i due rami* Γ_1, Γ_{-1} *(reali od immaginarii) dello spigolo di regresso. Quando avviene che la superficie* S_1 *(o la* S_{-1}*) luogo del ramo* Γ_1 *(o di* Γ_{-1}*) abbia queste curve per linee di curvatura?*

Proveremo che questo accade per tutte *e sole* le superficie S della classe (B), verificandosi del resto la proprietà per ambedue i rami dello spigolo di regresso [1].

8. Riprendiamo i calcoli al pincipio del n. 1 ponendovi $\sigma=\frac{\pi}{2}$, $a=k$, ciò che riduce la condizione

$$SX_1\frac{\partial x'}{\partial u}=0\,,$$

alla equazione in termini finiti per θ

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\theta+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\theta+\frac{\sqrt{E}}{k}=0\,. \tag{12}$$

Questa ci dà due valori distinti per θ (reali o immaginarii) e bisogna ora ricercare, scelto uno di questi valori per θ, le ulteriori condizioni affinchè sulla superficie S', definita dalle formole

$$x'=x+k(\cos\theta X_2+\operatorname{sen}\theta X_3)\,,$$

le linee $v=$ cost siano linee di curvatura.

Avendosi qui

$$X_1'=-\operatorname{sen}\theta X_2+\cos\theta X_3 \tag{13}$$

e inoltre

$$\frac{\partial x'}{\partial v}=-\frac{k}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\theta X_1+\sqrt{G}\,X_2+k\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)X_1'\,,$$

[1] Nel caso particolare delle superficie S con linee di curvatura in un sistema a flessione costante $\frac{1}{k}$, i due rami dello spigolo di regresso si riuniscono nella curva luogo dei centri di curvatura e la serie (11) si riduce a due sole superficie S, S_1 in relazione involutoria.

ne deduciamo

$$X_3' = \Omega \left\{ \sqrt{G}\, X_1 + \frac{k}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} (\cos\theta X_2 + \operatorname{sen}\theta X_3) \right\}, \tag{14}$$

avendo posto

$$\frac{1}{\Omega^2} = G + \left(\frac{k}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)^2. \tag{15}$$

Esprimiamo che le linee $v = \text{cost}$ sono di curvatura per la S' colle proporzioni

$$\frac{\partial X_3'}{\partial u} : \frac{\partial Y_3'}{\partial u} : \frac{\partial Z_3'}{\partial u} = X_1' : Y_1' : Z_1'. \tag{16}$$

Bisogna dunque intanto che eseguendo colle (1) la derivata $\frac{\partial X_3'}{\partial u}$, a derivazione eseguita venga a mancare nel secondo membro della (14) il termine in X_1, ciò che dà l'equazione

$$\sqrt{G} \frac{\partial \Omega}{\partial u} + k \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \left\{ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u} \cos\theta + \frac{\sqrt{E}}{r_2} \operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{E}}{k} \right\} = 0,$$

ossia per la (12) semplicemente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = 0.$$

Questa, per la (15), equivale a

$$\frac{k^2}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\sqrt{EG}}{k^2} \right\} = 0, \tag{17}$$

nella quale il fattore esterno non può annullarsi, perchè se $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0$, ne seguirebbe

$$X_3' = X_1, \quad \frac{\partial X_3'}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \frac{\sqrt{E}}{r_2} X_3$$

e dalle proporzioni (16) avremmo

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\theta \frac{\sqrt{E}}{r_2} = 0,$$

ciò che contraddice alla (12). Dunque nella (17) dovrà annullarsi il secondo fattore, cioè: *ogni superficie* S *soluzione del problema* B) *appartiene necessariamente alla classe* (B) *caratterizzata da*

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\sqrt{EG}}{k^2} = 0.$$

Ma inversamente, supposta soddisfatta questa, indi anche la $\dfrac{\partial\Omega}{\partial u}=0$, si verifica facilmente che sussistono le proporzioni (16), e quindi le linee $v=$ cost sulla S′ sono in effetto linee di curvatura. Così la proprietà enunciata alla fine del n. 7 è stabilita.

Come ulteriore conferma, si osservi che dalla (B) segue l'altra

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)=\sqrt{EG}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{r_1 r_2}\right),$$

onde, derivando la (12) rapporto a v, deduciamo

$$\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)=-\frac{1}{k}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{\sqrt{EG}}{k}\cos\theta\right).$$

D'altra parte la (12) può anche scriversi

$$\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\operatorname{sen}\theta\right)\cdot\sqrt{G}\operatorname{sen}\theta=-\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{\sqrt{EG}}{k}\cos\theta\right),$$

e paragonando risulta

$$\frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{\sqrt{G}}{r_1}+\frac{\sqrt{G}}{k}\operatorname{sen}\theta\,. \tag{18}$$

Dunque la θ tratta dalla (12) soddisfa alla equazione differenziale (18), alla quale si riduce appunto la (b) n. 2 per $\sigma=\dfrac{\pi}{2}$, $a=k$. Questa esprime, come si è visto, che le linee (u, v) formano sulla S′ un sistema ortogonale che, per essere inoltre coniugato, coincide con quello delle linee di curvatura.

Matematica. — *Sull'analisi delle singolarità puntuali delle superficie algebriche mediante divisioni di polinomi.* Nota del Corrispondente F. Enriques [1].

1. Prendiamo le mosse dal problema fondamentale della teoria delle singolarità delle curve piane: determinare i punti multipli successivi di un ramo dato mediante la rappresentazione parametrica

$$x=t^{\nu}\quad,\quad y=at^{\nu'}+bt^{\nu''}+\cdots \tag{1}$$

Questo problema si lascia risolvere coll'uso di successive trasformazioni quadratiche (Nöther) o con analisi algebrica diretta, come ho accennato nella mia Nota del 7 maggio 1916; il resultato è che « i punti successivi del ramo, colle loro molteplicità, vengono pòrti dal procedimento per la ricerca del massimo comun divisore fra i numeri ν, ν', ν'' ... ».

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1917.