ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 novembre 1917.

F. D' Ovidio Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Paletnologia. — *Ancora la Grotta preistorica di Equi.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Su alcuni operatori superficiali.* Nota del Corrispondente R. Marcolongo.

Recenti e notevoli ricerche (1) hanno mostrato l'utilità e la necessità di considerare alcuni operatori superficiali, che presentano molta analogia con altri operatori di cui il prof. Burali ed io ci siamo diffusamente occupati nei due volumi dell' *Analyse vectorielle générale* (2).

(1) C. Burali-Forti, *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale generale* [Rend. Circolo mat. Palermo, t. 33, pp. 1-40 (1° semestre 1912)]; P. Burgatti, *Sulle discontinuità delle funzioni scalari e vettoriali e delle loro derivate nel passaggio attraverso una superficie* [Rend. R. Acc. Lincei, s. 5a, vol. XXV, pp. 311-316, 372-376 (1916)]: *I teoremi del gradiente, della divergenza, della rotazione sopra una superficie e loro applicazione ai potenziali* [Mem. R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, s. 7a, tomo IV, 1916-1917].

(2) C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale. I. Transformations linéaires*, Pavie, 1912; II. *Applications à la Mécanique et à la Physique*, Pavie, 1913. Indicheremo questa pubblicazione brevemente con A. V.

1. Se h è punto, vettore, omografia funzione di un punto P di una superficie σ, la *derivata superficiale* di h rispetto al punto P, che si accenna con $\left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma$ viene definita dalla

$$(1) \qquad \left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma = \frac{dh}{dP}\Big\{1 - \mathrm{H}(\mathbf{n}, \mathbf{n})\Big\} = \frac{dh}{dP} - \mathrm{H}\left(\mathbf{n}, \frac{dh}{dP}\mathbf{n}\right),$$

$\mathbf{n}$ essendo un vettore unitario parallelo alla normale in P a σ, volta in un senso determinato.

Segue di qui, come osserva il prof. Burali, che

a) $\left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma$ è un ente (operatore lineare; omografia, iperomografia) della stessa specie di $\frac{dh}{dP}$:

b) $\left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma \mathbf{n} = 0$;

c) $\left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma \mathbf{x} = \frac{dh}{dP}\mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{x} \times \mathbf{n} = 0$;

e reciprocamente. Infatti, se $\mathbf{u}$ è un vettore arbitrario, $\mathbf{x}$ vettore unitario normale ad $\mathbf{n}$, si può sempre porre

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}.\mathbf{n} + \mathbf{u} \times \mathbf{x}.\mathbf{x};$$

e però, in virtù di *b*) e *c*) risulta

$$\left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{x}.\frac{dh}{dP}\mathbf{x} = \frac{dh}{dP}\mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathbf{n}.\frac{dh}{dP}\mathbf{n} = \frac{dh}{dP}\Big\{1 - \mathrm{H}(\mathbf{n}, \mathbf{n})\Big\}\mathbf{u};$$

quindi, per l'arbitrarietà di $\mathbf{u}$, risulta la (1).

L'omografia $1 - \mathrm{H}(\mathbf{n}, \mathbf{n})$ è una dilatazione le cui direzioni principali sono $\mathbf{n}$ ed ogni $\mathbf{x}$ normale ad $\mathbf{n}$; applicata ad un vettore qualunque $\mathbf{u}$, dà il vettore proiezione di $\mathbf{u}$ sul piano tangente in P a σ.

In particolare se $\mathbf{u}$ è un vettore, da (1) risulta

$$(2) \qquad \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma = \frac{d\mathbf{u}}{dP} - \mathrm{H}\left(\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{n}\right);$$

quindi calcolando il primo invariante ed il vettore di questa omografia, si ha la definizione (Burgatti) della div e rot superficiale di un vettore; precisamente:

$$(3) \qquad \mathrm{div}_\sigma \mathbf{u} = \mathrm{I}_1 \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma = \mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{n}$$

$$(4) \qquad \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{u} = 2\mathrm{V}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma = \mathrm{rot}\,\mathbf{u} - \mathbf{n} \wedge \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{n}.$$

Di qui si deduce:

(5) $\quad \mathrm{div}_\sigma \mathbf{n} = \mathrm{div}\, \mathbf{n}\ ;\ \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{n} = \mathrm{rot}\, \mathbf{n} = 0\ ;\ \mathbf{n} \times \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{u}\,.$

Allo stesso modo si possono definire gli altri operatori, $\mathrm{grad}_\sigma\, \alpha$, $\mathrm{Rot}_\sigma\, \alpha$, ... ($\alpha$ omografia) valendosi delle (3), (4) di pag. 70; (1), (2) di pag. 97, 98 di A. V. I; e sostituendo alle ordinarie derivate, la derivata superficiale definita da (2).

In modo anche più semplice, in base alla (1) e riferendoci ad una terna fondamentale, si può definire $\mathrm{grad}_\sigma\, \alpha$ colla

$$\mathrm{grad}_\sigma\, \alpha = \left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{i}\right)_\sigma \mathbf{i} + \left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{j}\right)_\sigma \mathbf{j} + \left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{k}\right)_\sigma \mathbf{k}$$

e risulterà subito

$$\mathrm{grad}_\sigma\, \alpha = \mathrm{grad}\, \alpha - \left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{n}\right) \mathbf{n}\ ; \tag{6}$$

ed in particolare, se α è un numero reale φ,

$$\mathrm{grad}_\sigma\, \varphi = \mathrm{grad}\, \varphi - \mathrm{grad}\, \varphi \times \mathbf{n}\,.\,\mathbf{n}\ ; \tag{7}$$

cioè (Burali): il gradiente superficiale è la componente tangenziale dell'ordinario vettore che rappresenta il gradiente della funzione numerica φ.

Con procedimento del tutto analogo si possono definire gli operatori superficiali $\mathrm{Rot}_\sigma\, \alpha$, $\Delta'_\sigma \mathbf{u}$, $\Delta_\sigma\, \alpha$, mediante le

$$\mathrm{Rot}_\sigma\, \alpha = \mathrm{Rot}\, \alpha - \mathbf{n} \wedge \frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{n} \tag{8}$$

$$\Delta'_\sigma \mathbf{u} = \Delta' \mathbf{u} - \frac{d\left(\dfrac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{n}\right)}{dP}\,\mathbf{n} \tag{9}$$

$$\Delta_\sigma\, \alpha = \Delta\, \alpha - \frac{d\left(\dfrac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{n}\right)}{dP}\,\mathbf{n}\ ; \tag{10}$$

e se α è un numero reale φ:

$$\Delta_\sigma \varphi = \Delta \varphi - \mathbf{n} \times \frac{d\,\mathrm{grad}\, \varphi}{dP}\,\mathbf{n}\,. \tag{11}$$

Di qui

$$\Delta'_\sigma \mathbf{n} = \Delta' \mathbf{n}\,.$$

2. Valgono per i nuovi operatori superficiali così definiti quasi tutte le proprietà dimostrate in A. V. I. Così

$$\Delta'_\sigma \mathbf{u} = \mathrm{grad}_\sigma \frac{d\mathbf{u}}{dP}$$

e se $\mathbf{a}$ è un vettore costante:

$$(\mathrm{Rot}_\sigma\,\alpha)\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}_\sigma\,\alpha\,\mathbf{a}\ ;\ \Delta'_\sigma(\alpha\mathbf{a}) = \Delta_\sigma\,\alpha\,.\,\mathbf{a}\,.$$

Vogliamo qui notare le due nuove formule:

$$(12)\qquad \mathrm{rot}_\sigma\,\mathrm{grad}_\sigma\,\varphi = \mathbf{n} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{dP}\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{H}\,(\mathbf{n}\,,\mathbf{n})\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$(13)\qquad \mathrm{div}_\sigma\,\mathrm{rot}_\sigma\,\mathbf{u} = 2\mathrm{V}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\frac{d\mathbf{n}}{dP}\right) \times \mathbf{n}\ ;$$

cioè, in generale, i secondi membri non sono più nulli, come per gli ordinarii operatori.

Per dimostrare la (12), pongasi

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}_\sigma\,\varphi = \mathrm{grad}\,\varphi - \mathrm{grad}\,\varphi \times \mathbf{n}\,.\,\mathbf{n}\ ;$$

$$\mathrm{rot}_\sigma\,\mathrm{grad}_\sigma\,\varphi = \mathrm{rot}\,\mathbf{v} - \mathbf{n} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dP}\,\mathbf{n}\,.$$

Ora, per formule note, si ha successivamente:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = -\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{grad}\,\varphi \times \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} = -\left(\frac{d\,\mathrm{grad}\,\varphi}{dP}\,\mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{dP}\,\mathrm{grad}\,\varphi\right) \wedge \mathbf{n}\ ;$$

$$\mathbf{n} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dP}\,\mathbf{n} = \mathbf{n} \wedge \left\{ \frac{d\,\mathrm{grad}\,\varphi}{dP}\,\mathbf{n} \right.$$
$$\left. -\,(\mathbf{n} \times \mathrm{grad}\,\varphi)\,\frac{d\mathbf{n}}{dP}\,\mathbf{n} - \mathrm{grad}\,(\mathrm{grad}\,\varphi \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}\,.\,\mathbf{n} \right\}\ ;$$

ricordando quindi che le due omografie $\dfrac{d\,\mathrm{grad}\,\varphi}{dP}$, $\dfrac{d\mathbf{n}}{dP}$ sono due dilatazioni e che $\dfrac{d\mathbf{n}}{dP}\,\mathbf{n} = 0$, risulta la prima forma della (12); la seconda forma si deduce applicando la [3] di pag. 84 di A. V. I.

Per la (13), posto per compendio $\alpha = \dfrac{d\mathbf{u}}{dP}$, si deduce subito

$$\mathrm{div}_\sigma\,\mathrm{rot}_\sigma\,\mathbf{u} = \mathbf{n} \times \left(\mathrm{rot}\,\alpha\,\mathbf{n} - \frac{d\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{n}\right) = 2\mathbf{n} \times \left\{ \mathrm{V}\left(\frac{d\,\alpha\,\mathbf{n}}{dP}\right) - \frac{d\,\mathrm{V}\,\alpha}{dP}\,\mathbf{n} \right\}.$$

Ma (A. V. I., pag. 130 e pag. 67)

$$\frac{d\,\alpha\,\mathbf{n}}{dP} = \frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{n} + \alpha\,\frac{d\mathbf{n}}{dP}\quad ;\quad \frac{d\,\mathrm{V}\,\alpha}{dP}\,\mathbf{n} = \mathrm{V}\left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{n}\right);$$

quindi è vera la (13).

Sono del pari notevoli ed utili queste altre formule

$$(14)\qquad \mathrm{div}_\sigma\,\mathrm{grad}_\sigma\,\varphi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}_\sigma\,\varphi\ ;$$

e per h numero

(15) $$\mathrm{div}_\sigma (h \,\mathrm{grad}_\sigma \varphi) = \mathrm{div}\,(h \,\mathrm{grad}_\sigma \varphi)\,,$$

(16) $$\mathbf{n} \times \mathrm{rot}_\sigma \,\mathrm{grad}_\sigma \varphi = 0\,;$$

la cui dimostrazione non presenta difficoltà.

Possiamo ora domandarci di assegnare le soluzioni più generali delle equazioni

(17) $$\mathrm{div}_\sigma \mathbf{u} = 0 \quad , \quad \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{u} = 0\,.$$

La prima equivale alla

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{n}\,.$$

Se quindi poniamo, con m numero e $\mathbf{v}$ vettore da determinarsi:

$$\mathbf{u} = m\,\mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}\,,$$

si ottiene subito

$$m \,\mathrm{div}\,\mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$$

ed anche, per le (5),

$$m \,\mathrm{div}_\sigma \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{v}\,;$$

e questa, per $\mathrm{div}\,\mathbf{n} \neq 0$, determina il numero m, mentre $\mathbf{v}$ resta arbitrario. Quindi la soluzione più generale della prima delle (17) è

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{n} \times \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{v}}{\mathrm{div}_\sigma \mathbf{n}}\,\mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}$$

con $\mathbf{v}$ arbitrario. In particolare, assumendo $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\varphi$, si ha la soluzione

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \wedge \mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{n} \wedge \mathrm{grad}_\sigma \varphi\,.$$

Se poi $\mathrm{div}\,\mathbf{n} = 0$ (caso delle superficie a curvatura media nulla), per la risolubilità della prima delle (17) occorre che $\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$; ed m risulta arbitrario.

Applicando lo stesso metodo alla seconda equazione, per la (4) otteniamo

$$\mathrm{grad}\,m \wedge \mathbf{n} + \left(\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \frac{d\mathbf{v}}{dP}\right)\mathbf{n} - \left(\mathrm{div}\,\mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{dP}\right)\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{v}}{dP}\,\mathbf{n}\,.\,\mathbf{n} - \frac{d\mathbf{v}}{dP}\,\mathbf{n}\,;$$

ossia

(18) $$\mathrm{grad}\,m \wedge \mathbf{n} + \mathbf{n}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \mathbf{v}\,\mathrm{div}\,\mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{dP}\,\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{v}}{dP}\,\mathbf{n}\,.\,\mathbf{n}\,.$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{n}$ risulta

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n} = \operatorname{div} (\mathbf{v} \times \mathbf{n} \,.\, \mathbf{n})$$

quindi

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} \,.\, \mathbf{n} + \operatorname{rot} \mathbf{w}$$

con

$$\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{w} = 0 \tag{19}$$

e però

$$\mathbf{u} = m\, \mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{w} \,, \tag{10}$$

è la forma generale della soluzione della seconda delle (17), essendo $\mathbf{w}$ un vettore qualunque soddisfacente alla (19), e m un numero che soddisfa la (18), della forma

$$\operatorname{grad} m \wedge \mathbf{n} = \mathbf{t}$$

$\mathbf{t}$ essendo un vettore noto. Se prendiamo $\mathbf{w} = \mathbf{n}$, risulta $\operatorname{grad} m \wedge \mathbf{n} = 0$ e quindi m costante su σ e si ottiene la soluzione nota $\mathbf{u} = m\, \mathbf{n}$ (m costante).

Osserviamo ancora che, valendo la formula (A. V. I, pag. 84 [2])

$$\operatorname{grad}_\sigma (\mathbf{n} \wedge) = - \operatorname{rot}_\sigma \mathbf{u} \,,$$

si conclude che una soluzione particolare della

$$\operatorname{grad}_\sigma \alpha = 0$$

è data da

$$\alpha = \mathbf{n} \wedge .$$

3. Le formule integrali, costituenti i teoremi della divergenza, del rotore e del gradiente su di una superficie σ, limitata da un contorno s, e stabilite dal prof. Burgatti [1], cioè:

$$\int \operatorname{div}_\sigma \mathbf{u} \,.\, d\sigma = \int \mathbf{n} \times \mathbf{u} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{n}\, d\sigma - \int \mathbf{v} \times \mathbf{u}\, ds$$

$$\int \operatorname{rot}_\sigma \mathbf{u} \,.\, d\sigma = \int \mathbf{n} \wedge \mathbf{u} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{n}\, d\sigma - \int \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}\, ds$$

$$\int \operatorname{grad}_\sigma \alpha \,.\, d\sigma = \int \alpha\, \mathbf{n} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{n}\, d\sigma \quad - \int \alpha\, \mathbf{v}\, ds$$

$\mathbf{v}$ essendo un vettore unitario normale ad s e vòlto verso l'interno di σ, possono essere agevolmente completate. Basta, seguendo il metodo costan-

[1] Vedi la seconda delle Note citate del prof. Burgatti.

tomente seguìto in A. V. I, pp. 108 e seg. (¹), nel secondo sostituire ad $\mathbf{u}$ il vettore $\alpha\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ vettore costante) ed α omografia funzione di P; porre nel terzo $\alpha = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$, per ottenere le nuove formule:

$$\int \mathrm{Rot}_\sigma\, \alpha\, d\sigma = \int \mathbf{u} \wedge \alpha\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{n}\, d\sigma - \int \mathbf{v} \wedge \alpha\, ds$$

$$\int \Delta'_\sigma\, \mathbf{u}\, d\sigma = \int \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\, \mathbf{n}\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{n}\, d\sigma - \int \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\, \mathbf{v}\, ds$$

$$\int \Delta_\sigma\, \alpha\, d\sigma = \int \left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\, \mathbf{n}\right).\,\mathrm{div}\,\mathbf{n}\, d\sigma - \int \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\, \mathbf{v}\, ds\,;$$

quest' ultima, a sua volta, si ottiene dalla precedente ponendo $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{a}$.

4. Una importante applicazione, fatta dal Burgatti, di questi operatori superficiali consiste nella ricerca, sotto forma assoluta, delle discontinuità dei potenziali di strato semplice e di doppio strato attraverso σ; e a varie questioni della teoria dell'elasticità.

Accennando con $[h]$ la discontinuità di h attraverso σ, la formula fondamentale dimostrata dal Burgatti (²) che dà la discontinuità della derivata di un vettore rispetto ad un punto, è la seguente:

$$\left[\frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}}\right] = \frac{d[\mathbf{s}]}{d\mathrm{P}} + \mathrm{H}(\mathbf{n}\,,\mathbf{v})\,, \tag{21}$$

$\mathbf{v}$ essendo un altro vettore incognito.

Vogliamo accennare ad un'altra applicazione e che riguarda una ricerca, oggetto di due recenti e interessanti Note del prof. Maggi (³).

Immaginiamo che $\mathbf{s}$ rappresenti lo spostamento in un punto di un corpo elastico isotropo, e generalmente discontinuo attraverso σ; e supponiamo invece che sia continua, attraverso σ, la pressione normale; cioè

(¹) Col sussidio dei metodi e delle notazioni dell'A. V. il sig. Vincent C. Poor, dell'Università di Michigan, ha ottenuto eleganti formule di trasformazione di integrali di volume in integrali di superficie, relative ad una omografia funzione simmetrica di due punti P e M: *Transformation Theorems in the Theory of the Linear Vector Function* [Bull. of the American Mathem. Society, vol. XXII, pp. 174-181 (1916)]. Vedi nello stesso volume le osservazioni del sig. G. B. Wilson, pp. 336-337 e la replica del Poor, pp. 503-504. Sui metodi di Gibbs si può vedere quanto, in risposta al sig. Wilson, ripetutamente il prof. Burali ed io esponemmo nelle nostre pubblicazioni.

(²) Vedi la prima delle Note citate.

(³) G. A. Maggi, *Sopra una formula commutativa e alcune sue applicazioni* [Rend. R. Acc. Lincei, s. 5ª, vol. XXVI, pp. 189-194 (1917)]; *Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche* [Ibid., pp. 350-357].

detta β la omografia delle pressioni interne, λ e μ le solite costanti elastiche d'isotropia e quindi (A. V. II. pag. 29 [1])

$$\beta = -\lambda \operatorname{div} \mathbf{s} - 2\mu \, \mathrm{D} \frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}},$$

si abbia $[\beta \mathbf{n}] = 0$; ossia

$$\lambda [\operatorname{div} \mathbf{s}] \, \mathbf{n} + 2\mu \left[\mathrm{D} \frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}} \right] \mathbf{n} = 0 . \tag{22}$$

Supponiamo ora che su σ la discontinuità di $\mathbf{s}$ sia, nel caso degli spostamenti di Volterra,

$$[\mathbf{s}] = \mathbf{a} + \Omega \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O})$$

con $\mathbf{a}$, Ω, O costanti; per modo che

$$\operatorname{div} [\mathbf{s}] = 0 \quad , \quad \frac{d[\mathbf{s}]}{d\mathrm{P}} = \Omega \wedge \quad , \quad \mathrm{D} \frac{d[\mathbf{s}]}{d\mathrm{P}} = 0 .$$

Operando sulla (21) con I_1 e D risulta

$$[\operatorname{div} \mathbf{s}] = \mathbf{n} \times \mathbf{v} \quad ; \quad \left[\mathrm{D} \frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}} \right] \mathbf{n} = \tfrac{1}{2} \mathbf{v} + \tfrac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{v} \, . \, \mathbf{n} ;$$

e sostituendo nella (22)

$$(\lambda + \mu) \, \mathbf{n} \times \mathbf{v} \, . \, \mathbf{n} + \mu \mathbf{v} = 0 .$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{n}$ risulta $\mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0$ e quindi $\mathbf{v} = 0$. Ossia, (21),

$$\left[\frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}} \right] = \Omega \wedge \quad , \quad \left[\mathrm{D} \frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}} \right] = 0 . \tag{23}$$

La continuità della dilatazione, trae di conseguenza la continuità delle componenti di deformazione, cioè dello strain.

Posto ora $\dfrac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}} = \alpha$, dalle (23) risulta ($\mathbf{a}$ vettore costante)

$$[\alpha \mathbf{a}] = \Omega \wedge \mathbf{a} \quad , \quad \frac{d[\alpha \mathbf{a}]}{d\mathrm{P}} = 0 .$$

D'altra parte, sempre conformemente alla (21), si può porre

$$\left[\frac{d \, \alpha \mathbf{a}}{d\mathrm{M}} \right] = \mathrm{H}(\mathbf{n}, \mathbf{v})$$

e quindi per ogni $\mathbf{t}$ tale che $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = 0$, risulta

$$\left[\frac{d \, \alpha \, \mathbf{a}}{d\mathrm{M}} \right] \mathbf{t} = 0 ;$$

e questa, come si vede subito, traduce il fatto che tutte le derivate seconde delle componenti (u, v, w) dello spostamento, tranne $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \dots$ se $\mathbf{n}$ è parallelo alle z, sono continue attraverso σ.

Ma ora considerando l'equazione di equilibrio e supposte continue le forze di massa, risulta

$$(\lambda + \mu)[\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{s}] + \mu[\mathrm{grad}\,\alpha] = 0 .$$

Se ci riferiamo ad una terna fondamentale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{n}$ e notiamo che

$$\mathrm{grad}\,\alpha = \frac{d\alpha\,\mathbf{i}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{i} + \frac{d\alpha\,\mathbf{j}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{j} + \frac{d\alpha\,\mathbf{n}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{n} ;$$

e che grad div $\mathbf{s}$ è lineare nelle $\frac{d\alpha\,\mathbf{i}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{i}$, $\frac{d\alpha\,\mathbf{i}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{j}, \dots, \frac{d\alpha\,\mathbf{n}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{n}$, si conclude che $\left[\frac{d\alpha\,\mathbf{n}}{d\mathrm{M}}\right]\mathbf{n}$ è continua. Da questo risultato e da quello già conseguito si trae che

$$\left[\frac{d\alpha\,\mathbf{a}}{d\mathrm{M}}\right] = 0 ;$$

sono cioè continue le derivate seconde delle componenti di spostamento e quindi continue le derivate prime dello strain.

E così si può continuare.

Fisica matematica. — *Omogeneità delle equazioni e Similitudine nella fisica.* Nota I di Paolo Straneo, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

Origine e argomento di queste ricerche.

1. In questi ultimi anni fu ripetutamente richiamata l'attenzione dei fisici e dei matematici sul Principio della similitudine fisica dalle discussioni provocate da due interessanti pubblicazioni; l'una di Lord Rayleigh [1] che semplicemente incitava a far maggior uso di quel principio, evidentemente inteso quale immediata estensione del noto Principio della similitudine dinamica a tutti i rami della fisica; l'altra del sig. R. C. Tolman [2],

[1] *Nature*, vol. 95, n. 2368, marzo 1915; vol. 95, n. 2387 e vol. 95, n. 2389.

[2] Physical Review NS., vol. III, pag. 214: vol. IV, pag. 145; vol. IV, pag. 345; vol. VI, pag. 219; Oefversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Föhandlingar, Bd. LVII Afd. A. N:o 22; Science Reports of the Tôhoku Imp. University, I, vol. V, pag. 33; Physikal Review NS., vol. VIII, pag. 1, pag. 8 e pag. 423.